







NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1878.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME DIX-SEPTIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

1878.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LES COORDONNÉES DES POINTS ET DES DROITES DANS LE PLAN, DES POINTS ET DES PLANS DANS L'ESPACE (*);

Par M. CASORATI,

Professeur à l'Université de Pavie.

(Traduction de l'italien par un Abonné.)

Pour exposer les fondements de la Géométrie analytique du plan, en considérant simultanément comme élément générateur de la figure le point et la droite, quelques auteurs prennent tout d'abord comme coordonnées de la droite les deux coordonnées plückériennes et les emploient en même temps que les coordonnées cartésiennes, dont ils veulent naturellement se servir avant de parler des coordonnées homogènes. Ces deux systèmes de coordonnées ne donnent pas toujours des formules correspondantes de même nature analytique, et l'on en conclut que les coordonnées cartésiennes ne

(*) Cette étude a été inspirée par la lecture de l'opinion émise à la page 61 des *Vorlesungen über Geometrie* von A. Clebsch; bearbeitet und herausgegeben von Dr F. Lindemann, 1875-1876.

peuvent se concilier entièrement avec le principe de la dualité. Il me semble que cette conclusion n'est pas licite et que le fait qui y donne lieu ne prouve qu'une chose, c'est que les coordonnées plückériennes ne sont pas en corrélation parfaite avec les coordonnées cartésiennes.

Il me semble très-facile de transformer géométriquement, suivant la loi de la dualité, la conception ordinaire des coordonnées cartésiennes en un système de coordonnées pour la droite, qui est préférable au système plückérien.

Les élèves trouveront sans doute quelque intérêt à cette Note, où je considère aussi les coordonnées homogènes pour les points et les droites dans le plan et pour les points et les plans dans l'espace; car les idées qui conduisent du système cartésien au système corrélatif que nous avons en vue s'appliquent aussi à ces coordonnées et avec une égale simplicité.

§ I. — *Coordonnées du point et de la droite dans le plan.*

1. Considérons d'abord les éléments, points et droites, du plan. Les coordonnées du point (cartésiennes ou homogènes) sont des nombres propres à déterminer les droites parallèles aux droites fondamentales (axes des coordonnées cartésiennes ou côtés du triangle fondamental) qui déterminent le point, leur élément commun.

Nous dirons donc que les coordonnées de la droite sont des nombres propres à déterminer des points qui, à leur tour, déterminent la droite, leur élément commun; ces points étant, par rapport aux points fondamentaux, dans la relation corrélative au parallélisme entre les droites.

2. Deux droites sont dites *parallèles* quand leur élément, ou point commun, appartient à une droite ε fixée d'une manière particulière (la droite à l'infini). Deux points seront donc entre eux dans la relation corrélative au parallélisme quand leur élément commun, c'est-à-dire la droite qui les joint, passe par un point e fixé d'une manière particulière. Nous pourrons exprimer cette relation en disant que *les points sont alignés sur e*.

3. Par suite, en laissant de côté, pour le moment, le cas des deux coordonnées, et en ne considérant que celui de trois coordonnées, α_1, α_2, α_3 étant les droites fondamentales, et a_1, a_2, a_3 les points fondamentaux, nous dirons que :

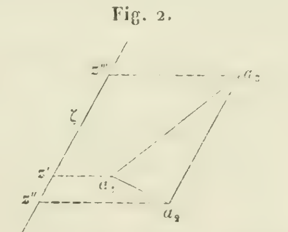
Les coordonnées d'un point x (fig. 1) sont les trois nombres

Fig. 1.

propres à déterminer les droites ξ', ξ'', ξ''' qui passent par x et qui sont parallèles aux droites α_1, α_2, α_3 (c'est-à-dire telles que les points $\alpha_1\xi'$, $\alpha_2\xi''$, $\alpha_3\xi'''$ soient sur la droite ε).

Les coordonnées d'une droite ζ (fig. 2) sont les trois nombres

Fig. 2.



propres à déterminer les points z', z'', z''' qui appartiennent à ζ et qui sont alignés avec a_1, a_2, a_3 (c'est-à-dire tels que les droites a_1z', a_2z'', a_3z''' passent par le point e).

On pourra nommer ξ', ξ'', ξ''' *les éléments coordonnés du point x*, et z', z'', z''' *les éléments coordonnés de la droite ζ*.

4. Les définitions que nous venons de donner ne sont pas encore complètes ; nous les compléterons au moyen de quelques déterminations particulières convenablement choisies. Dans ces définitions figurent quatre droites fixes quand il s'agit des coordonnées des points, et quatre points fixes pour les coordonnées des droites. Les quatre éléments d'une espèce étant fixés arbitrairement, on peut encore fixer arbitrairement les quatre éléments de l'autre espèce (*). Mais, afin d'obtenir la plus grande simplicité possible pour traiter simultanément les questions au moyen des coordonnées de l'une et de l'autre espèce, il est utile de disposer convenablement les éléments d'une espèce par rapport à ceux de l'autre. Dans ce but, nous ferons coïncider le triangle $a_1 a_2 a_3$ avec le trilatère $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, et nous ferons passer le point e à l'infini dans une direction fixée d'une manière quelconque, sur laquelle il est important de distinguer les deux sens, que nous désignerons par $+e$ et $-e$; la droite ε est aussi à l'infini.

Cela posé, nos définitions seront complètes en disant :

Les coordonnées sont les mesures, prises toutes sur une même direction e, de ce que nous nommerons les intervalles entre chaque élément coordonné et l'élément fondamental correspondant (droite parallèle ou point aligné), en tenant compte du signe positif quand le passage fini de l'élément fondamental à l'élément coordonné se fera dans le sens $+e$ pour

---

(*) Ici, il est vrai, une des droites ε a été placée à l'avance à l'infini Mais si, au lieu du parallelisme, on s'inspirait de la condition plus générale de faire couper les éléments coordonnés ξ', ξ'', ξ''' et les éléments fondamentaux y relatifs α_1, α_2, α_3 sur une droite fixée arbitrairement, les définitions précédentes pourraient être conservées sans changement, mais il n'en serait pas de même des formules qui en découlent.

les points, —e pour les droites, et du signe négatif dans les cas contraires.

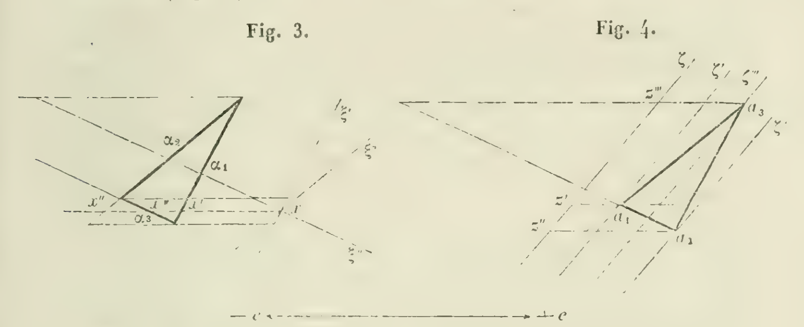
En conservant la direction commune des mesures et la distinction entre les sens positif et négatif, nous pourrons dire encore que :

Les coordonnées du point x sont les mesures des intervalles entre x et les points x', x'', x''' alignés avec x et qui appartiennent aux droites fondamentales (*fig.* 3).

Les coordonnées de la droite ζ sont les mesures des intervalles entre ζ et les droites ζ', ζ'', ζ''' parallèles à ζ et tracées par les points fondamentaux (*fig.* 4).

Fig. 3.

Fig. 4.



Dans les figures ci-dessus, les coordonnées sont toutes positives pour le point x et pour la droite ζ.

Nous emploierons, pour désigner les coordonnées d'un point ou d'une droite, le symbole même du point ou de la droite accompagné des indices 1, 2, 3, toutes les fois que cela ne sera pas incommode. Pour le point x et pour la droite ζ des figures précédentes, nous écrirons

$$x_1 = +\overline{x'x}, \quad \zeta_1 = +\overline{a_1 z'},$$
$$x_2 = +\overline{x''x}, \quad \zeta_2 = +\overline{a_2 z''},$$
$$x_3 = +\overline{x'''x}; \quad \zeta_3 = +\overline{a_3 z'''};$$

et $\overline{pq}$ désignera la mesure absolue de l'intervalle entre p et q.

5. Tout point fondamental a deux coordonnées égales à zéro, et la troisième égale à une des hauteurs du triangle fondamental prises dans la direction e (*fig.* 5). La

Fig. 5.

même remarque est vraie pour chacune des droites fondamentales. Désignons ces trois hauteurs avec les signes qui leur appartiennent comme coordonnées des sommets, ou, ce qui revient au même, comme coordonnées des côtés, par h_1, h_2, h_3; nous aurons les tableaux suivants (*) :

	Coordonnées des points			Coordonnées des droites		
	a_1.	a_2.	a_3.	α_1.	α_2.	α_3.
(1)	h_1,	o,	o,	h_1,	o,	o,
	o,	h_2,	o,	o,	h_2,	o,
	o,	o,	h_3,	o,	o,	h_3.

Dans le cas de la *fig.* 5, on aura

$$h_1 = -\overline{b_1 a_1}, \quad h_2 = +\overline{b_2 a_2}, \quad h_3 = -\overline{b_3 a_3}.$$

(*) Ces tableaux paraissent identiques. Mais, pour une position quelconque du triangle par rapport au trilatère, l'un ne coïnciderait avec l'autre qu'après une rotation autour de la diagonale, comme on le voit ci-dessous :

a_1.	a_2.	a_3.	
h_{11}	h_{21}	h_{31}	α_1
h_{12}	h_{22}	h_{32}	α_2
h_{13}	h_{23}	h_{33}	α_3

Mêmes observations pour les tableaux suivants, (2), etc.

6. Les figures qui précèdent donnent aussi immédiatement les tableaux suivants pour les coordonnées des éléments coordonnés du point x et de la droite ζ.

	Coordonnées des droites			Coordonnées des points		
	ξ'.	ξ''.	ξ'''.	x'.	x''.	x'''.
(2)	$h_1 - x_1,$	$-x_2,$	$-x_3,$	$h_1 - \zeta_1,$	$-\zeta_2,$	$-\zeta_2,$
	$-x_1,$	$h_2 - x_2,$	$-x^3,$	$-\zeta_1,$	$h_2 - \zeta_2,$	$-\zeta_3,$
	$-x_1,$	$-x_2,$	$h_3 - x_3,$	$-\zeta_1,$	$-\zeta_2,$	$h_3 - \zeta_3.$

7. Nous avons fixé non-seulement les rapports, mais les grandeurs effectives des trois coordonnées d'un élément, afin de pouvoir établir la relation qui existe entre elles. On peut exprimer immédiatement cette relation, pour les deux espèces de coordonnées, sous la forme (*)

$$(3) \qquad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} = 1, \qquad \frac{\zeta_1}{h_1} + \frac{\zeta_2}{h_2} + \frac{\zeta_3}{h_3} = 1.$$

8. Les coordonnées d'un point x situé, d'une manière quelconque, sur la droite commune aux points t, u peuvent être exprimées ainsi :

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{lt_1 + mu_1}{l + m}, \\ x_2 = \dfrac{lt_2 + mu_2}{l + m}, \\ x_3 = \dfrac{lt_3 + mu_3}{l + m}. \end{cases}$$

Le rapport $\dfrac{l}{m}$ dépend seulement de x.

8. Les coordonnées d'une droite ζ passant, d'une manière quelconque, par le point commun aux droites φ, χ peuvent être exprimées ainsi :

$$\zeta_1 = \frac{\lambda\varphi_1 + \mu\chi_1}{\lambda + \mu},$$
$$\zeta_2 = \frac{\lambda\varphi_2 + \mu\chi_2}{\lambda + \mu},$$
$$\zeta_3 = \frac{\lambda\varphi_3 + \mu\chi_3}{\lambda + \mu},$$

Le rapport $\dfrac{\lambda}{\mu}$ dépend seulement de ζ.

(*) En prenant comme coordonnées les rapports des coordonnées

9. Il résulte immédiatement des équations (2) et (4) que :

La condition pour que le point x soit sur la droite ζ est | La condition pour que la droite ζ passe par le point x est

$$(5)\qquad \frac{\zeta_1 x_1}{h_1} + \frac{\zeta_2 x_2}{h_2} + \frac{\zeta_3 x_3}{h_3} = 0.$$

Cette équation linéaire, homogène et symétrique par rapport aux coordonnées du point et de la droite, peut être utilement qualifiée d'*équation représentatrice du point et de la droite réunis*.

10. Nous ne continuerons pas l'exposition systématique des formules en coordonnées particulières; nous allons reprendre la définition plus générale donnée au n° 3, et nous la compléterons avec la généralité voulue.

Nous nous sommes contenté, au n° 3, de dire que les coordonnées (du point ou de la droite) *doivent être propres* à déterminer les éléments coordonnés (du point ou de la droite); mais nous n'avons pas précisé de quelle manière elles doivent remplir ce but. Nous ajouterons, à cet effet, que *les coordonnées doivent être proportionnelles aux produits de constantes fixées à l'avance par les coordonnées particulières que nous venons de considérer*.

Par suite, en conservant la même position relative du triangle et du trilatère fondamentaux, ainsi que les notations déjà employées, et en désignant par k_1, k_2, k_3, λ_1, λ_2, λ_3 six nombres fixés arbitrairement, et par X_1,

---

déjà prises aux valeurs de h y relatives (rapports qui pour les x sont indépendants de la direction), les coordonnées de chaque élément fondamental seraient ou nulles, ou égales à l'unité, et les équations (3) prendraient la forme $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = 1$, ...

X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3 les nouvelles coordonnées du point x et de la droite ζ, la définition de ces coordonnées est complète et la plus générale par rapport à un triangle fondamental donné, et nous pourrons les résumer dans les formules suivantes :

$$(6)\qquad \begin{cases} \rho X_1 = k_1 x_1, & \sigma Z_1 = \lambda\zeta_1, \\ \rho X_2 = k_2 x_2, & \sigma Z_2 = \lambda\zeta_2, \\ \rho X_3 = k_3 x_3; & \sigma Z_3 = \lambda\zeta_3; \end{cases}$$

où ρ et σ désignent des facteurs qui restent complétement indéterminés.

Cette définition, qui laisse indéterminée la grandeur de chaque coordonnée, pour ne déterminer que la valeur de leurs rapports, correspond bien au principe de l'homogénéité, que nous introduisons dans toutes les formules et équations par l'usage de trois coordonnées. Pour ce motif, nous nommerons X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2, Z_3 *coordonnées homogènes.*

L'équation qui représente une droite et un point réunis devient, avec les nouvelles coordonnées,

$$(7)\qquad \frac{Z_1 X_1}{h_1 k_1 \lambda_1} + \frac{Z_2 X_2}{h_2 k_2 \lambda_2} + \frac{Z_3 X_3}{h_3 k_3 \lambda_3} = 0.$$

Comme il importe que cette équation prenne la forme très-simple

$$(8)\qquad Z_1 X_1 + Z_2 X_2 + Z_3 X_3 = 0,$$

nous poserons la relation suivante entre les deux ternes de constantes k et λ :

$$(9)\qquad h_1 k_1 \lambda_1 = h_2 k_2 \lambda_2 = h_3 k_3 \lambda_3.$$

Remarquons que la liaison que nous établissons entre les constantes s'exprime avec la plus grande simplicité.

11. Nous savons déjà que les formules, pour la transformation simultanée des coordonnées X_1, X_2, X_3, Z_1, Z_2 Z_3, relatives à un triangle $a_1\ a_2 a_3$, en d'autres relatives à un nouveau triangle fondamental, sont linéaires et entières, et que celles qui se rapportent aux coordonnées des droites ont pour coefficients les éléments adjoints aux éléments constitués par les coefficients des formules relatives aux coordonnées des points, ou réciproquement.

Nous ne nous occuperons donc pas de ces formules, mais nous chercherons celles qui s'appliquent au cas de deux coordonnées.

Dans ce cas, nous n'avons que deux droites fondamentales α_1, α_2 (*fig.* 6) et deux points fondamentaux a_1, a_2 (*fig.* 7). Nous entendons maintenant par coordonnées

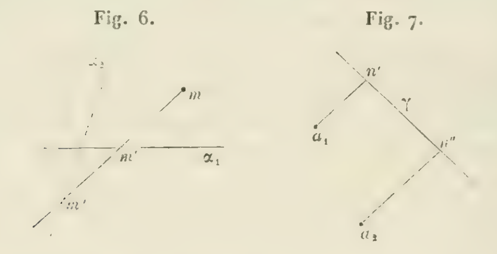


Fig. 6. Fig. 7.

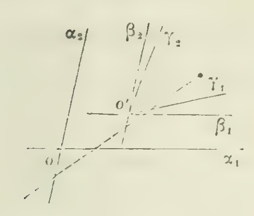
du point variable m celles qui sont représentées en $m'm$, $m''m$, et par coordonnées de la droite variable γ celles qui sont représentées en $a_1 n'$, $a_2 n''$. La direction commune de ces coordonnées est la direction donnée e. Le sens $+e$ de cette droite sera le sens positif pour les coordonnées des points, et le sens $-e$ sera le sens positif des coordonnées des droites.

Désignons par x_1, x_2 les coordonnées de m, et par z_1, z_2 celles du même point rap-

Désignons par ξ_1, ξ_2 les coordonnées de r, et par ζ_1, ζ_2 celles de la même droite rapportée à

porté à deux nouvelles droites fondamentales γ_1, γ_2. La recherche des expressions des x en fonction des z peut se décomposer en deux recherches plus simples, en considérant un couple intermédiaire de droites fondamentales, le couple des droites β_1, β_2 (*fig.* 8),

Fig. 8.



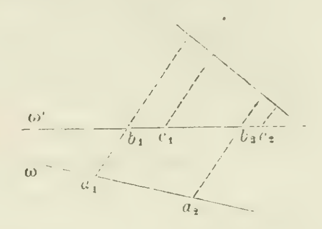
parallèles aux premières α_1, α_2, et passant par le point o' commun aux nouvelles γ_1, γ_2.

En désignant par o'_1, o'_2 les coordonnées de o' par rapport à α_1, α_2, et par y_1, y_2 les coordonnées du point variable relatives à β_1, β_2, la figure nous donnera immédiatement

$$(10)\quad \begin{cases} x_1 = o'_1 + y_1, \\ x_2 = o'_2 + y_2, \end{cases}$$

deux nouveaux points fondamentaux c_1, c_2. La recherche des expressions des ξ en fonction des ζ peut se décomposer en deux recherches plus simples, en considérant un couple intermédiaire de points fondamentaux, le couple des points b_1, b_2 (*fig.* 9), alignés sur les

Fig. 9.



premiers a_1, a_2, et ayant la droite ω' commune avec les nouveaux c_1, c_2.

En désignant par ω'_1, ω'_2 les coordonnées de ω' par rapport à a_1, a_2, et par η_1, η_2 les coordonnées de la droite variable relatives à b_1, b_2, la figure nous donnera immédiatement

$$\xi_1 = \omega'_1 + \eta_1,$$
$$\xi_2 = \omega'_2 + \eta_2.$$

Telles sont les formules qui servent à passer d'un couple de droites ou points fondamentaux à un nouveau couple de droites ou plans fondamentaux, parallèles respectivement aux premières droites ou alignés sur les premiers points.

Les mêmes figures 8 ou 9 nous donnent encore aisément les formules suivantes :

$$11) \quad \begin{cases} y_1 = k_{11} z_1 + k_{12} z_2, & \eta_1 = \varkappa_{11} \zeta_1 + \varkappa_{12} \zeta_2, \\ y_2 = k_{21} z_2 + k_{21} z_2, & \eta_2 = \varkappa_{21} \zeta_2 + \varkappa_{22} \zeta_2. \end{cases}$$

Ces formules servent à passer d'un couple de droites (β_1, β_2) ou de points (b_1, b_2) fondamentaux à un autre couple de droites (γ_1, γ_2) ou de points (c_1, c_2) fondamentaux, ayant en commun avec les anciens un point (o') ou une droite (ω').

Les coefficients k et $\varkappa$ sont des rapports anharmoniques, comme il est indiqué dans les tableaux suivants :

Coeff.	Rapp. anharm. des droites.			Coeff.	Rapp. anharm. des points.		
$k_{11} = \beta_1,$	$\gamma_1,$	$\gamma_2,$	$\varepsilon',$	$\varkappa_{11} = b_1,$	$c_1,$	$c_2,$	$e',$
$k_{12} = \beta_1,$	$\gamma_2,$	$\gamma_1,$	$\varepsilon',$	$\varkappa_{12} = b_1,$	$c_2,$	$c_1,$	$e',$
$k_{21} = \beta_2,$	$\gamma_1,$	$\gamma_2,$	$\varepsilon',$	$\varkappa_{21} = b_2,$	$c_1,$	$c_2,$	$e',$
$k_{22} = \beta_2,$	$\gamma_2,$	$\gamma_1,$	$\varepsilon',$	$\varkappa_{22} = b_2,$	$c_2,$	$c_1,$	$e'.$

où ε' représente la droite commune aux points o', e.

où e' signifie le point commun aux droites ω', ε.

Chacune des coordonnées $(x_1, x_2$ ou $y_1, y_2, z_1, z_2)$, dont nous nous sommes servi dans ce numéro pour le point, ne diffère de la coordonnée cartésienne rapportée à la même droite fondamentale que par un facteur constant. On pourra donc passer, quand on voudra, de ces coordonnées aux cartésiennes, et *vice versa,* car les formules relatives aux unes se convertiront moyennant ces facteurs en celles qui sont relatives aux autres.

Il est aisé de reconnaître que les coordonnées dont nous venons de nous servir dans ce numéro et dans les numéros précédents se déduisent du système général de

coordonnées projectives de M. Fiedler. Mesurant toutes les distances dans une même direction, on obtiendra le terne x_1, x_2, x_3 du n° 4, en éloignant à l'infini dans cette direction le quatrième point fondamental e et le terne ζ_1, ζ_2, ζ_3, en éloignant à l'infini la quatrième droite fondamentale. On obtiendra aussi le couple x_1, x_2 de ce numéro en éloignant à l'infini un des côtés du triangle fondamental, et le couple ξ_1, ξ_2 en éloignant à l'infini un des sommets du trilatère. Il est bien entendu que, dans ce cas, on ne fait coïncider le triangle et le trilatère qu'après cette transformation. Cette manière de particulariser la définition de M. Fiedler nous semble plus conforme à l'esprit de la dualité géométrique que l'emploi des coordonnées cartésiennes pour le point, et plückériennes pour la droite. Il ne suffit pas, pour préférer les coordonnées plückériennes aux précédentes ξ_1, ξ_2, que leur combinaison avec les coordonnées cartésiennes donne une forme plus simple à l'équation du point et de la droite réunis. D'ailleurs nous nous proposons de montrer ailleurs la grande utilité de nos coordonnées.

§ II. — *Coordonnées des points et des plans dans l'espace à trois dimensions.*

1. Les définitions de la première Section s'étendent immédiatement au cas des points et des plans dans l'espace.

Puisque le parallélisme des plans consiste en ce qu'ils ont une droite commune située dans un plan ε fixé d'une manière particulière (à l'infini), la disposition corrélative des points doit consister en ce qu'ils ont en commun une droite passant par un point e, fixée d'une manière particulière.

2. Nous dirons donc que :

Les (trois ou quatre) coordonnées d'un point x sont des nombres propres à déterminer les (trois ou quatre) plans ξ', ξ'', ... qui passent par x, et qui sont parallèles respectivement aux (trois ou quatre) plans fondamentaux α_1, α_2, ...

Les (trois ou quatre) coordonnées d'un plan ζ sont des nombres propres à déterminer les (trois ou quatre) points z', z'', ... qui se trouvent dans ζ et alignés respectivement avec les (trois ou quatre) points fondamentaux a_1, a_2, ...

L'alignement doit s'entendre, comme ci-dessus, sur un point fixe e.

Les plans ξ', ξ'', ... pourront être nommés *éléments coordonnés du point x*, et les points z', z'', ... *éléments coordonnés du plan ζ*.

3. Ici encore nous éloignerons à l'infini, dans une direction fixée arbitrairement, le point e et le plan ε, et, sur cette direction fixe, nous distinguerons les deux sens $+e$, $-e$, et nous compléterons la définition des coordonnées en disant que *les* (trois ou quatre) *coordonnées sont les mesures prises, dans la direction e, des intervalles entre chaque élément coordonné et l'élément fondamental correspondant* (parallèle ou aligné), *en tenant compte du signe positif quand le passage fini de l'élément fondamental à l'élément coordonné se fera pour les points dans le sens $+e$ et pour les plans dans le sens $-e$, et du signe négatif dans les cas contraires.*

En ne changeant rien à la direction et au sens des mesures, on peut encore dire que :

Les coordonnées du point x sont les mesures des intervalles entre x et les points x', x'', ... alignés sur x et qui appartiennent aux plans fondamentaux.

Les coordonnées du plan ζ sont les mesures des intervalles entre ζ et les plans ζ', ζ'', ... parallèles à ζ et qui passent par les points fondamentaux.

4. Bornons-nous au cas des quatre coordonnées, en les désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 pour le point x, et par ζ_1, ζ_2, ζ_3, ζ_4 pour le plan ζ, et faisons coïncider le tétragone $a_1 a_2 a_3 a_4$ avec le tétraèdre $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$.

Chaque point ou plan fondamental aura trois coordonnées nulles, et la quatrième égale à une des quatre hauteurs du tétraèdre fondamental, hauteur prise dans la direction des mesures. En indiquant ces hauteurs avec les signes qui leur conviennent comme coordonnées des points fondamentaux par h_1, h_2, h_3, h_4, nous aurons pour les :

	Coordonnées des points				Coordonnées des plans			
	a_1.	a_2.	a_3.	a_4.	α_1.	α_2.	α_3.	α_4.
(1)	h_1,	o,	o,	o,	h_1,	o,	o,	o,
	o,	h_2,	o,	o,	o,	h_2,	o,	o,
	o,	o,	h_3,	o,	o,	o,	h_3,	o,
	o,	o,	o,	h_4,	o,	o,	o,	h_4,

Pour les éléments coordonnés du point x et du plan ζ, nous aurons

Coordonnées des plans				Coordonnées des points			
ξ'.	ξ''.	ξ'''.	ξ^{IV}.	z'.	z''.	z'''.	z^{IV}.
$h_1 - x_1$,	$- x_2$,	$- x_3$,	$- x_4$,	$h_1 - \zeta_1$,	$- \zeta_2$,	$- \zeta_3$,	$- \zeta_4$,
$- x_1$,	$h_2 - x_2$,	$- x_3$,	$- x_4$,	$- \zeta_1$,	$h_2 - \zeta_2$,	$- \zeta_3$,	$- \zeta_4$,
$- x_1$,	$- x_2$,	$h_3 - x_3$,	$- x_4$,	$- \zeta_1$,	$- \zeta_2$,	$h_3 - \zeta_3$,	$- \zeta_4$,
$- x_1$,	$- x_2$,	$- x_3$,	$h_4 - x_4$,	$- \zeta_1$,	$- \zeta_2$,	$- \zeta_3$,	$h_4 - \zeta_4$.

6. Nous avons la relation suivante :

Entre les coordonnées d'un point quelconque x :

$$(3)\quad \frac{x_1}{h_1} + \frac{x_2}{h_2} + \frac{x_3}{h_3} + \frac{x_4}{h_4} = 1.$$

Entre les coordonnées d'un plan quelconque ζ :

$$\frac{\zeta_1}{h_1} + \frac{\zeta_2}{h_2} + \frac{\zeta_3}{h_3} + \frac{\zeta_4}{h_4} = 1.$$

7. On peut exprimer de la manière suivante :

Les coordonnées d'un point x, situé d'une manière quelconque dans le plan contenant les trois points t, u, v :

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{lt_1 + mu_1 + nv_1}{l + m + n}, \\ x_2 = \dfrac{lt_2 + mu_2 + nv_2}{l + m + n}, \\ x_3 = \dfrac{lt_3 + mu_3 + nv_3}{l + m + n}, \\ x_4 = \dfrac{lt_4 + mu_4 + nv_4}{l + m + n}, \end{cases}$$

où les rapports $l : m : n$ ne dépendent que de x.

Les coordonnées d'un plan ζ qui passe, d'une manière quelconque, par le point appartenant aux plans φ, χ, ψ :

$$\zeta_1 = \frac{\lambda\varphi_1 + \mu\chi_1 + \nu\psi_1}{\lambda + \mu + \nu},$$
$$\zeta_2 = \frac{\lambda\varphi_2 + \mu\chi_2 + \nu\psi_2}{\lambda + \mu + \nu},$$
$$\zeta_3 = \frac{\lambda\varphi_3 + \mu\chi_3 + \nu\psi_3}{\lambda + \mu + \nu},$$
$$\zeta_4 = \frac{\lambda\varphi_4 + \mu\chi_4 + \nu\psi_4}{\lambda + \mu + \nu},$$

où les rapports $\lambda : \mu : \nu$ ne dépendent que de ζ.

8. Des expressions (4) et (3) nous déduisons immédiatement que :

La condition pour que le point x soit sur le plan ζ est

La condition pour que le plan ζ passe par le point x est

$$\frac{x_1\zeta_1}{h_1} + \frac{x_2\zeta_2}{h_2} + \frac{x_3\zeta_3}{h_3} + \frac{x_4\zeta_4}{h_4} = 0,$$

équation que l'on pourra nommer *représentatrice du point et du plan réunis.*

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

Par M. LAGUERRE,

I.

1. Soit une équation algébrique de degré n et à

coefficients réels ou imaginaires ; en prenant $\frac{x}{y}$ pour inconnue, elle peut s'écrire sous la forme suivante

$$f(x, y) = 0,$$

f désignant un polynôme homogène et du degré n par rapport aux quantités x et y ; ou encore, en posant $z = \frac{x}{y}$,

$$F(z) = f(z, 1) = 0.$$

En prenant d'une façon arbitraire, dans un plan, deux droites rectangulaires pour axe des abscisses et pour axe des ordonnées, je conviendrai, suivant l'usage habituel, de représenter une quantité imaginaire $\alpha + \beta i$ par un point ayant α pour abscisse et β pour ordonnée.

Cela posé, $z = \frac{x}{y}$ étant une quantité imaginaire quelconque représentée par le point m du plan, j'appellerai *point dérivé du point* m le point μ représentant la quantité $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$ déterminée par l'équation

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0.$$

On déduit de cette équation

$$\zeta = -\frac{f'_y}{f'_x},$$

ou, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes,

$$\zeta = z - n\frac{F(z)}{F'(z)}.$$

Lorsque l'on considère z comme la valeur approchée d'une racine de l'équation $F(Z) = 0$, en désignant par z' la valeur que l'on en déduit pour cette racine, par la

méthode de Newton on a

$$z' = z - \frac{F(z)}{F'(z)};$$

d'où cette conclusion : Si m est un point du plan représentant une valeur approchée d'une racine de l'équation $F(Z) = 0$, et si la valeur approchée de cette racine, que l'on en déduit par la méthode de Newton, est représentée par le point m', le point μ dérivé du point m s'obtient en portant dans la direction mm', et à partir du point m, une longueur égale à $n \times mm'$.

2. J'établirai d'abord la proposition suivante :

Théorème I. — *Étant donnée une équation algébrique de degré n, si l'on prend un point m arbitrairement dans le plan et si l'on désigne par μ le point dérivé du point m, tout cercle passant par les deux points m et μ, s'il ne passe pas par toutes les racines de l'équation, contient au moins une de ces racines ; et, dans ce cas, une au moins des racines est située à l'extérieur du cercle.*

Pour démontrer cette proposition, je remarquerai que, α, β, γ, δ désignant des quantités imaginaires quelconques, les différents points représentés par l'expression

$$Z = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t},$$

quand on donne à t toutes les valeurs *réelles* possibles, sont situés sur un même cercle, et que, pour deux valeurs imaginaires quelconques de t, les points représentant les valeurs correspondantes de z sont situés du même côté par rapport au contour du cercle, ou de côtés différents, suivant que, dans les valeurs de la variable t, les coefficients de i sont de même signe ou de signes contraires.

Cela posé, $z = \frac{x}{y}$ ayant une valeur quelconque et ζ étant déterminé par l'équation

$$\zeta = \frac{\xi}{\eta} = -\frac{f'_y}{f'_x},$$

l'expression

$$Z = \frac{tx - \lambda f'_y}{ty - \lambda f'_x},$$

quand on y donne à t toutes les valeurs réelles, représente un cercle passant par le point m représentant z, puisque, pour $t = \infty$, on a $Z = \frac{x}{y}$; ce cercle passe également par le point dérivé μ représentant ζ, puisque, pour $t = 0$, on a

$$Z = -\frac{f'_y}{f'_x}.$$

On voit ainsi, à cause de l'indétermination de λ, que l'expression précédente représente, pour des valeurs réelles de t, les différents points d'un cercle quelconque passant par les deux points m et μ et, d'après ce que j'ai dit plus haut, pour démontrer la proposition énoncée, il suffira de prouver que l'équation

$$F\left(\frac{tx - \lambda f'_y}{tx + \lambda f'_x}\right) = 0,$$

si elle admet des racines imaginaires, admet au moins une racine où le coefficient de i est positif et une racine où ce coefficient est négatif.

L'équation précédente peut s'écrire ainsi :

$$f(tx - \lambda f'_y, ty + \lambda f'_x) = 0,$$

ou, en développant suivant les puissances de t,

$$(1) \qquad At^n + Bt^{n-2} + Ct^{n-3} + \ldots = 0.$$

Le coefficient de t^{n-1} dans cette équation est égal à zéro; un calcul facile montre, en effet, qu'il est égal à

$$\lambda(f'_x f'_y - f'_x f'_y).$$

De là résulte que la somme des racines de l'équation (1) est nulle; en désignant donc par $a+bi$, $a'+b'i$, ... ces racines, on a

$$\Sigma(a+bi)=0,$$

d'où

$$\Sigma b = 0;$$

et, par suite, si toutes les valeurs de b ne sont pas nulles, il y a au moins deux de ces valeurs qui sont de signes contraires, ce qui démontre la proposition énoncée.

3. Théorème II. — *Étant donnés un cercle quelconque qui renferme toutes les racines de l'équation $f(X, Y) = 0$ et un point $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$, situé en dehors de ce cercle, tous les points $z = \frac{x}{y}$, définis par l'équation*

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0,$$

sont situés dans l'intérieur du cercle.

En effet, z désignant l'un quelconque des points ainsi définis, ζ est son point dérivé; si z n'était pas situé dans l'intérieur du cercle, par les deux points z et ζ qui lui sont tous deux extérieurs, on pourrait mener un cercle renfermant dans son intérieur le cercle donné et, par suite, toutes les racines, ce qui est contraire à la proposition précédente. Le théorème est donc démontré.

On démontrerait de même la proposition suivante :

Étant donnés un cercle quelconque à l'extérieur du-

quel sont situées toutes les racines de l'équation

$$f(X, Y) = 0,$$

et un point $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$, *situé dans l'intérieur de ce cercle, tous les points* $z = \frac{x}{y}$, *définis par l'équation*

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0,$$

sont situés à l'extérieur de ce cercle.

4. Étant donnée une équation de degré n, $F(z) = 0$, et m étant le point représentatif d'une valeur z, approchée d'une racine de cette équation, désignons par m' le point représentatif de la valeur approchée de cette racine que donne la méthode de Newton. Le point μ dérivé de m s'obtient en portant, à partir de m dans la direction mm', une longueur égale à $n \times mm'$, et tout cercle passant par les points m et μ contient au moins une racine de l'équation.

En particulier, le cercle décrit sur $m\mu$ comme diamètre contiendra une racine et, si m est suffisamment voisin de la racine, m sera très-voisin de m' et par conséquent de μ; le cercle dont je viens de parler aura donc un rayon très-petit et contiendra la racine cherchée.

Dans tous les cas, on peut énoncer la proposition suivante :

Quelle que soit la quantité z, *il y a au moins une racine de l'équation* $F(z) = 0$ *dont la différence avec l'expression*

$$z - \frac{F(z)}{F'(z)}$$

a un module moindre que $(n - 1)$ *fois le module de* $\frac{F(z)}{F'(z)}$.

(*A suivre.*)

DÉTERMINATION ANALYTIQUE DES FOYERS DANS LES SECTIONS CONIQUES;

PAR M. E. G.,
Ancien élève du lycée de Reims.

On définit généralement un *foyer* un point tel, que la distance d'un point de la courbe à ce point soit une fonction rationnelle et linéaire des coordonnées du point de la courbe.

Partant de cette définition, on arrive, par une méthode classique, mais peu élégante, à cinq relations entre les coordonnées du foyer, les coefficients de l'équation de la courbe et trois paramètres qui entrent au second degré. L'élimination de ces paramètres donnerait deux équations déterminant les coordonnées des foyers; mais cette élimination, sauf dans les cas les plus simples, donne lieu à des calculs impraticables.

On arrive rapidement et sans introduire de paramètre aux deux équations qui déterminent les foyers, en définissant ces points des cercles de rayon nul bitangents à la courbe et introduisant ainsi dans le calcul la notion des imaginaires.

La méthode suivante, qui, je crois, n'a pas encore été proposée, repose uniquement sur la première définition, laquelle fournit immédiatement trois équations, contenant un seul paramètre au premier degré. L'élimination se fait sans difficulté, et conduit aux deux mêmes équations que l'on obtient par l'emploi des imaginaires.

J'établirai d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme homogène du second degré

à trois variables soit, à un facteur constant près, un carré parfait.

Soit

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$$

un semblable polynôme. Pour que ce soit un carré parfait, il faut que, si l'on égale à zéro ce polynôme, à un système de valeurs de x et de y corresponde une seule valeur de la troisième variable z.

Égalant à zéro et résolvant par rapport à z, on a

$$cz = -(gx + fy) \pm \sqrt{(gx + fy)^2 - c(ax^2 + by^2 + 2hxy)}.$$

Pour qu'on ait une seule valeur de z, quels que soient x et y, il faut qu'on ait

$$g^2 - ac = 0, \quad f^2 - bc = 0, \quad fg - ch = 0.$$

Ces conditions sont nécessaires. Elles sont aussi évidemment suffisantes. En effet, elles expriment que l'on a identiquement

$$c(ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy) = (gx + fy + cz)^2.$$

Elles restent les mêmes si l'on considère un polynôme quelconque du second degré à deux variables de la forme

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c.$$

Cela posé, soit

$$(1) \qquad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

l'équation d'une conique quelconque. Transportons l'origine en un point dont les coordonnées soient α et β. Si l'on désigne par S le résultat de la substitution de α et de β à la place de x et de y dans l'équation (1), la courbe

rapportée aux nouveaux axes a pour équation

$$(2)\qquad ax^2 + 2hxy + by^2 + \frac{dS}{d\alpha}x + \frac{dS}{d\beta}y + S = 0.$$

Cherchons les conditions pour que l'origine soit un foyer. L'équation (2) peut s'écrire

$$\lambda(x^2 + y^2) = (a + \lambda)x^2 + 2hxy + (b + \lambda)y^2 + \frac{dS}{d\alpha}x + \frac{dS}{d\beta}y + S.$$

Le premier membre représente, au facteur arbitraire λ près, le carré de la distance d'un point de la courbe à l'origine; donc, pour que l'origine soit un foyer, il faut et il suffit que le second membre soit, à un facteur constant près, un carré parfait; on doit donc avoir les relations suivantes :

$$(3)\qquad \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)^2 - 4(a + \lambda)S = 0,$$

$$(4)\qquad \left(\frac{dS}{d\beta}\right)^2 - 4(b + \lambda)S = 0,$$

$$(5)\qquad \frac{dS}{d\alpha}\frac{dS}{d\beta} - 4hS = 0.$$

L'équation (5) ne contient pas λ. Éliminons λ entre (3) et (4); en retranchant membre à membre, on a

$$(6)\qquad \left(\frac{dS}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{dS}{d\beta}\right)^2 - 4(a - b)S = 0.$$

Les équations (5) et (6) déterminent les coordonnées α et β des foyers par rapport aux axes primitifs.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

1re SESSION. — JUILLET 1877.

1° *Géométrie analytique.*

On donne un triangle AOB, rectangle en O, et l'on considère toutes les hyperboles qui passent aux points A et B, et ont leurs asymptotes parallèles aux côtés OA, OB.

1° Former l'équation générale de ces hyperboles ;

2° Former l'équation du lieu des sommets de ces hyperboles et construire ce lieu ;

3° Prenant un point P sur le lieu trouvé, construire celle des hyperboles considérées qui a un sommet en P, et reconnaître sur quelle partie du lieu doit être ce point P, pour que A et B appartiennent soit à une même branche, soit aux deux branches de cette hyperbole.

2° *Calcul trigonométrique.*

On donne deux côtés a et b d'un triangle et l'angle C compris, savoir :

$$a = 3676^{m},351,$$
$$b = 2154^{m},742,$$
$$C = 103^\circ 46' 27''.$$

On demande de trouver le côté c, les angles A et B, ainsi que la surface du triangle.

3° *Épure de Géométrie descriptive* (*).

INTERSECTION D'UN CYLINDRE ET D'UN CÔNE.

On donne :

1° Un cylindre ayant pour base un cercle C, situé dans le plan horizontal de projection, et dont les génératrices sont parallèles à la droite de front BG, B′G′, inclinée à 45° sur xy;

2° Un cône dont la base est un cercle C_1, situé dans le plan horizontal, et dont le sommet est en SS′ sur la génératrice BG, B′G′ du cylindre. Le cercle de base du cylindre est tangent intérieurement en S à la base du cône :

$$CS = CB = 0^m,025, \quad C_1S = 0^m,055, \quad BB' = 0^m,11.$$

On demande :

1° De trouver les projections de l'intersection du cône et du cylindre ;

2° De représenter le cylindre supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le cône.

On indiquera à l'encre rouge les constructions nécessaires pour trouver un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Titre extérieur : intersection de surfaces.

Titre intérieur : cylindre et cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,21$ du petit côté inférieur.

4° *Physique et Chimie* (*).

I. Un tube recourbé ABCD, dont les deux branches

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

sont verticales et de même diamètre, renferme une certaine quantité de mercure et, au-dessus de ce mercure, dans la branche AB, qui est fermée, se trouve de l'air sec, sous la pression atmosphérique de $0^m,76$. La portion AB qui contient cet air a une longueur de $0^m,26$. On verse dans l'autre branche DC une colonne d'eau dont le poids est de $342^{gr},72$. Quelle est alors la différence de niveau des deux surfaces de mercure?

La section du tube est de 5 centimètres carrés et la densité du mercure est égale à 13,6.

II. 1° Préparation du chlore.

2° Quel est à zéro et sous la pression de $0^m,76$ le volume de chlore que l'on peut retirer de 750 kilogrammes de sel marin.

Équivalents	Na = 23, Cl = 35,43
Densité du chlore	δ = 2,44
Poids d'un litre d'air à zéro et sous la pression de $0^m,76$	$1^{gr},293$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

2e SESSION. — OCTOBRE 1877.

1° *Géométrie analytique* (*).

On donne un trapèze isoscèle ABCD dont la hauteur est $2h$, la demi-somme des bases $2a$ et les angles obtus α. On considère toutes les coniques circonscrites à ce trapèze :

1° Former l'équation générale de ces coniques ;

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

2° Trouver le lieu des points de contact de tangentes menées à chacune d'elles parallèlement au côté BC, et construire ce lieu après avoir vérifié que le côté BC en fait partie ;

3° Étant donné un point de ce lieu, reconnaître le genre de la conique circonscrite au trapèze qui passe par ce point.

2° *Calcul trigonométrique.*

Les trois côtés d'un triangle sont :

$$a = 4376^{m},76,$$
$$b = 3564^{m},37,$$
$$c = 2754^{m},82.$$

Calculer les angles et la surface.

3° *Épure de Géométrie descriptive* (*).

INTERSECTION D'UN TORE ET D'UN CÔNE DE RÉVOLUTION.

L'axe du tore yy' est vertical à $0^{m},130$ du plan vertical de projection et au milieu de la feuille ; le cercle méridien a $0^{m},055$ de rayon ; il est tangent à l'axe du tore et au plan horizontal de projection. Le cône touche le plan horizontal suivant une génératrice sa, $s'a'$ parallèle à la ligne de terre et rencontrant l'axe du tore ; son sommet (s, s') est à $0^{m},055$ de l'axe du tore et son angle au sommet est de 45 degrés.

On demande de représenter le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la portion de ce corps comprise dans le tore.

On indiquera à l'encre rouge les constructions em-

(*) Le lecteur est prié de faire la figure

ployées pour déterminer un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point.

Titre extérieur : intersection de surfaces.

Titre intérieur : tore et cône.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,260$ du petit côté inférieur.

4° *Physique et Chimie* (*).

I. Un manomètre à air comprimé, dont les deux branches sont verticales et de diamètres différents, est en communication avec un récipient de machine pneumatique. Ce manomètre renferme de l'air sous la pression de $0^m,760$ et la portion AB de la branche fermée, occupée par cet air, a une longueur de $0^m,30$. Le rapport des sections des branches CD et AB est égal à 2. On raréfie l'air contenu dans le récipient. Quelle différence de niveau faut-il produire entre les deux colonnes de mercure pour que la pression dans ce récipient diminue de $0^m,760$ à $0^m,156$?

II. 1° Préparation des acides du phosphore $PhO^5,3HO$ et $PhO^5,2HO$.

2° Quel est le poids du phosphore contenu dans 28 litres d'hydrogène phosphoré (PhH^3) ?

Équivalents	$\begin{cases} Ph = 32 \\ H = 1 \end{cases}$
Densité de l'hydrogène phosphoré.......	$\delta = 1,185$
Poids d'un litre d'air..................	$1^{gr},293$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

BIBLIOGRAPHIE.

Johannis Kepleri astronomi opera omnia; OEuvres complètes de l'astronome Jean Kepler, publiées par M. le Dr *Ch. Frisch,* de Stuttgard. 8 gros volumes grand in-8° de 6300 pages; Francfort-sur-le-Mein et Erlangen, Heyder et Zimmer, 1858.

Cette œuvre immense, qui fait le plus grand honneur à la Science allemande, a exigé plusieurs années pour s'accomplir. La publication a été commencée en 1857 et n'a été terminée qu'en 1871.

Ainsi que l'explique l'auteur dans sa Préface, les Français, les Anglais, les Italiens se sont lancés depuis longtemps dans l'exécution d'entreprises du même genre, et on les a vus publier tout ce qu'ils avaient recueilli des œuvres de leurs savants les plus célèbres : Laplace, Lagrange, Fresnel, Lavoisier, Newton, Galilée.

Le père et le fondateur de l'Astronomie moderne, celui dont le nom est sur les lèvres de tous ceux qui étudient le mouvement des corps célestes et les lois auxquelles il est soumis, celui-là n'était-il pas digne aussi d'un pareil honneur?

Tel est le sentiment qui a inspiré le Dr Frisch, lorsqu'il a eu l'idée de préparer une édition complète des OEuvres de Kepler. Ce travail n'a pas demandé moins de trente années de recherches. Tout ce que l'on a retrouvé des écrits du grand astronome se trouve réuni dans ce magnifique Ouvrage. La Correspondance privée, les Traités d'Astronomie, de Géométrie forment, comme on le voit, une riche moisson de faits, où, de nos jours encore, on peut puiser le germe de quelque vérité nouvelle.

Pour ma part, je suis heureux, je suis fier de dire que j'éprouve pour l'illustre fondateur de l'Astronomie la plus profonde admiration. Quel exemple, en effet, plus fortifiant et plus consolant que celui d'un grand esprit dont on suit pas à pas les efforts et les hésitations, les succès comme les faiblesses !

Les OEuvres de Kepler se distinguent par la science profonde et variée, l'habileté de l'argumentation, la vivacité du style, parfois empreint d'une verve et d'une chaleur poétiques, entremêlé parfois aussi de gaies réflexions qui trouvent parfaitement leur place au milieu d'un exposé technique.

L'énergie du style fait concevoir aisément la nature des difficultés avec lesquelles J. Kepler a été aux prises pendant de longues années. C'est particulièrement dans son étude des mouvements de Mars qu'il eut à surmonter les plus grands obstacles. Aujourd'hui, après les perfectionnements apportés au calcul et aux instruments d'observation, il est impossible de se représenter nettement ce qu'a dû être, pour employer l'expression de l'auteur, cette guerre opiniâtre que livra Kepler à un ennemi qui lui échappait sans cesse. Tout était inconnu dans ce mouvement, et même cette étude eût été inabordable sans l'hypothèse de Copernic. Aussi quelle pénétration d'esprit ne fallut-il pas pour venir à bout d'une pareille entreprise !

Kepler commença l'étude du mouvement de Mars en l'année 1600 et utilisa, dans cette recherche, des observations de Tycho-Brahé remontant à 1580. A la fin de l'année 1604, Kepler avait trouvé la *loi des orbites ;* la *loi des aires* suivit de près, en 1605 : on peut dire que ces deux premières lois furent énoncées dans le même temps, mais la découverte de la troisième loi, de la *proportionnalité des carrés des temps aux cubes des grands*

axes, exigea bien d'autres recherches encore; elle date du 8 mars 1618.

Ne pouvant prétendre exposer ici le détail d'un aussi vaste ensemble, nous nous bornerons à un aperçu rapide, mais nous demanderons à terminer par quelques mots au sujet de l'exécution matérielle de cet Ouvrage.

Il est difficile de se figurer quels obstacles aurait eu à surmonter un simple particulier, privé de ressources et de moyens d'action. Mais cet immense labeur a été honoré du patronage et des libéralités de Maximilien II, roi de Bavière, et de M. Norof, Ministre de l'Instruction publique en Russie, de l'approbation des astronomes allemands, et des suffrages des Académies de Vienne et de Berlin, auxquels sont venus s'ajouter ceux de diverses Sociétés savantes et de divers souscripteurs, tant en Europe qu'en Amérique.

L'auteur est enfin arrivé au bout de sa tâche, grâce à la savante et bienveillante collaboration de M. W. Struve, directeur de l'Observatoire de Poulkowa, qui a généreusement communiqué les manuscrits de Kepler que la bibliothèque de Poulkowa conserve à l'égal du trésor le plus précieux; grâce au soin dévoué avec lequel M. Otto Struve fils a coordonné et discuté tout ce que ces manuscrits renfermaient de plus difficile; grâce aussi au zèle éclairé de MM. C. Schraaf, professeur au gymnase de Tubingue, et H. Kratz, professeur au gymnase de Stuttgard. Possédant à fond la langue latine, M. Schraaf a réussi à traduire les passages embarrassants que leur style un peu archaïque avait rendus obscurs, et M. Kratz a bien voulu se charger du travail pénible de la composition typographique et de la correction de l'Ouvrage.

Telles sont, ainsi que l'indique le Dr Frisch, les bases d'après lesquelles a pu être menée à bonne fin la publication des *Œuvres complètes de Kepler.*

Nous mentionnons, très-brièvement d'ailleurs, les principales divisions de cet Ouvrage :

Tome I.

Préface du mystère cosmographique. Correspondance avec Mœstlin, Herwart, etc., de 1595 à 1600.

Le mystère cosmographique, dissertation sur les proportions de l'Univers, avec les lignes des polyèdres réguliers, les notes de la gamme musicale, etc.

L'apologie de Tycho-Brahé.

Calendriers et opuscules astrologiques, la plus grande partie en allemand.

Tome II.

Astronomie, partie optique. On y trouve la théorie et les conséquences de la réflexion et de la réfraction de la lumière.

Du télescope et des découvertes de Galilée.

Entretien avec le messager céleste envoyé par Galilée.

Dioptrique. Théorie des lentilles et des instruments d'optique.

De l'étoile nouvelle dans le pied du Serpentaire (1572).

De l'étoile nouvelle du Cygne (1600).

Du passage de Mercure sur le Soleil (1607).

Tome III.

Astronomie nouvelle, ou Théorie du mouvement de Mars (1609).

Commentaire sur les travaux d'Hipparque.

Calcul des éclipses de Lune de 1572 à 1625.

Théorie du mouvement de la Lune (on sait que Kepler a découvert la cinquième *inégalité*, connue sous le nom d'*équation annuelle*).

Lettre sur l'éclipse de Soleil du 12 octobre 1605.

Tome IV.

Écrits relatifs à la chronologie (calendrier grégorien, nativité du Christ, etc.)

De la stéréométrie des tonneaux. On y trouve une remarque judicieuse où est énoncé le fait de la faible variation d'une grandeur au voisinage de ses maxima ou minima.

Correspondance de Kepler.

Tome V.

Harmonies de l'Univers.

Notes sur la stéréométrie.

Sur une machine hydraulique.

Correspondance de Kepler.

Tome VI.

Précis de l'Astronomie de Copernic.

Tables Rudolphines.

Discussion des observations de Regiomontan et de Walther.

Correspondance de Kepler.

Tome VII.

Description de la comète de 1607.

Chiliade de logarithmes. Invention et usage des logarithmes.

De la figure hexagonale de la neige.

Divers extraits des manuscrits de Poulkowa.

Correspondance de Kepler.

Tome VIII.

Première Partie. — Traduction, en latin, du *Traité de la Lune,* par Plutarque.

Élégies, pièces de vers, discours, mélanges, etc., extraits des manucrits de Poulkowa.

Deuxième Partie. — Histoire de l'Astronomie au XVIe siècle.

Biographie de Kepler.

Lettres de Kepler.

Table des matières.

L'Ouvrage renferme de nombreuses figures dans le texte, un autographe et le portrait de Kepler, des vi-

gnettes allégoriques, des notes, des commentaires et des éclaircissements rédigés en latin par les éditeurs. Rien, en un mot, n'a été épargné pour donner à ce vaste ensemble toute la perfection désirable.

H. Brocard.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 34

(voir 1re série, t. I, p. 395).

Si, d'un point situé sur une surface algébrique de degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes, le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique de même degré m.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point du lieu, n le nombre des plans fixes, x, y, z les coordonnées du pied de l'une des perpendiculaires abaissées sur l'un des plans dont l'équation est en coordonnées rectangulaires

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

X, Y, Z les coordonnées du point de la surface

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = 0,$$

d'où sont issues toutes ces perpendiculaires ; on a

$$n\xi = \Sigma x, \quad n\eta = \Sigma y, \quad n\zeta = \Sigma z.$$

Les coordonnées x, y, z vérifient d'abord l'équation du plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

puis celle de la perpendiculaire

$$\frac{X - x}{\cos\alpha} = \frac{Y - y}{\cos\beta} = \frac{Z - z}{\cos\gamma};$$

en sorte que, de ces trois équations, l'on tire

$$x = X - P\cos\alpha, \quad y = Y - P\cos\beta, \quad z = Z - P\cos\gamma,$$

en posant, pour abréger,

$$P = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma - p.$$

Ajoutons les équations analogues relatives aux différents plans, nous aurons

$$n\xi = \Sigma x = nX - \Sigma P\cos\alpha,$$
$$n\eta = \Sigma y = nY - \Sigma P\cos\beta,$$
$$n\zeta = \Sigma z = nZ - \Sigma P\cos\gamma.$$

De ces équations on tire X, Y, Z exprimés linéairement en ξ, η, ζ et, en portant dans l'équation

$$f(X, Y, Z) = 0$$

de degré m, on obtient une équation de même degré en ξ, η, ζ, qui est l'équation du lieu. Ch. B.

Note. — La même question a été résolue par M. H. Brocard.

Question 1099

(voir 2e série, t. XI, p. 480, et t. XII, p. 500);

Par M. MORET-BLANC.

Sur chacun des côtés d'un quadrilatère circonscriptible on construit deux triangles isoscèles semblables. Soient α, β, γ, δ *les points de rencontre des hauteurs*

des triangles extérieurs; α', β', γ', δ' *ceux des hauteurs des triangles intérieurs.*

1° *Les médianes des deux quadrilatères* $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ *se coupent en un même point qui est leur milieu.*

2° *Les médianes du quadrilatère* $\alpha\beta\gamma\delta$ *se coupent à angle droit.*

3° *Dans le cas du triangle, un des sommets du quadrilatère donné devient le point de contact de l'un des côtés du triangle avec le cercle inscrit. Les deux propriétés précédentes subsistent.*

On demande quand les trois conditions sont remplies. (H. Brocard.)

1° Soit G le point de concours des médianes du quadrilatère donné, situé au milieu de chacune d'elles, et centre de gravité de quatre masses égales placées aux quatre sommets du quadrilatère. La somme algébrique des projections des quatre demi-médianes sur un axe quelconque passant par G est égale à zéro. Les droites qui joignent les extrémités de ces médianes respectivement aux points α, β, γ, δ ou α', β', γ', δ' peuvent être regardées comme représentant des forces égales appliquées aux milieux des côtés du quadrilatère donné, perpendiculaires et proportionnelles à ces côtés, dirigées toutes vers l'extérieur ou vers l'intérieur; on sait que ces forces se font équilibre, et par conséquent la somme de leurs projections sur un axe quelconque passant par G est identiquement nulle; il en est donc de même de la somme des projections des droites qui joignent le point G soit aux sommets du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, soit à ceux du quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Donc ce point est le centre de gravité de quatre masses égales placées aux sommets de l'un quelconque de ces deux quadrilatères, et, par suite,

il est le point de concours des médianes de chacun d'eux et le milieu de chacune d'elles.

Cette première partie du théorème a donc toujours lieu (*).

2° Pour que les médianes du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ se coupent à angle droit, il faut et il suffit que les diagonales $\alpha\gamma$ et $\beta\delta$ soient égales, car alors les médianes sont les diagonales d'un losange.

Le carré d'une droite est égal à la somme des carrés de ses projections sur deux axes rectangulaires.

Supposons que α, β, γ, δ soient les points de concours des hauteurs des triangles isoscèles construits respectivement sur $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, et que 2ω soit l'angle au sommet des triangles isoscèles.

En projetant $\alpha\gamma$ sur AD et sur une perpendiculaire à AD, puis sur BC et sur une perpendiculaire à BC, et ajoutant les résultats pour plus de symétrie, on a

$$2\overline{\alpha\gamma}^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2 + c^2}{2\cos^2\omega}$$

$$+ \frac{2ac\cos\frac{A+B-C-D}{2}\cos\frac{A-B+C-D}{2}}{2\cos^2\omega}$$

$$- \frac{ad\cos(A+\omega)}{\cos\omega} - \frac{ab\cos(B+\omega)}{\cos\omega}$$

$$- \frac{bc\cos(C+\omega)}{\cos\omega} - \frac{cd\cos(D+\omega)}{\cos\omega}.$$

On trouve de même, en projetant $\beta\delta$ sur AB et sur une perpendiculaire à AB, puis sur CD et sur une per-

(*) M. Pellissier fait également remarquer que cette proposition a lieu pour un quadrilatère quelconque.

pendiculaire à CD,

$$2\overline{\beta\delta}^2 = a^2 + c^2 + \frac{b^2 + d^2}{2\cos^2\omega}$$

$$+ \frac{2bd\cos\frac{B + C - D - A}{2}\cos\frac{A - B + C - D}{2}}{2\cos^2\omega}$$

$$- \frac{ad\cos(A + \omega)}{\cos\omega} - \frac{ab\cos(B + \omega)}{\cos\omega}$$

$$- \frac{bc\cos(C + \omega)}{\cos\omega} - \frac{cd\cos(D + \omega)}{\cos\omega}.$$

Égalant ces deux valeurs et multipliant par $2\cos^2\omega$, il vient

$$(2\cos^2\omega - 1)(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)$$

$$= 2\cos\frac{A - B + C - D}{2}$$

$$\times\left(bd\cos\frac{B + C - D - A}{2} - ac\cos\frac{A + B - C - D}{2}\right).$$

Or

$$2\cos^2\omega - 1 = \cos 2\omega,$$

et, le quadrilatère ABCD étant circonscriptible,

$$b + d = a + c,$$

d'où

$$b^2 + d^2 - a^2 - c^2 = 2(ac - bd);$$

la relation précédente peut donc s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos 2\omega\,(ac - bd) \\ &\quad = \cos\frac{A - B + C - D}{2} \\ &\quad\quad \times\left(bd\cos\frac{B + C - D - A}{2} - ac\cos\frac{A + B - C - D}{2}\right), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$\cos 2\omega = \frac{\cos\frac{A-B+C-D}{2}\left(bd\cos\frac{B+C-D-A}{2} - ac\cos\frac{A+B-C-D}{2}\right)}{ac-bd}.$$

Tel doit être l'angle au sommet des triangles isoscèles pour que la deuxième condition soit remplie.

La relation (1) est satisfaite, quel que soit 2ω, lorsque le quadrilatère donné est un losange.

Si $A = C$, la relation précédente se réduit à

$$\cos 2\omega = -\cos\frac{A-B+C-D}{2}\cos\frac{B-D}{2}.$$

Pour le quadrilatère $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$, il faut changer le signe de ω, ce qui ne produit aucun changement dans la formule définitive.

3° Dans le cas d'un triangle ABC circonscrit à un cercle, le sommet D devient le point de contact du côté AC; tous les raisonnements précédents subsistent en faisant D = 2 droits. La formule (1) devient

$$\cos 2\omega = \frac{\sin\frac{A-B+C}{2}\left(bd\sin\frac{B+C-A}{2} - ac\sin\frac{A+B-C}{2}\right)}{ac-bd},$$

c et d étant les deux segments du côté AC.

Si le triangle est équilatéral, on a

$$\cos 2\omega = -\sin^2 30^\circ = -\frac{1}{4}.$$

Questions 1218 *et* 1219

(voir 2[e] série, t. XVI, p. 48);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'artillerie, à Calais.

1218. *Pour tout nombre impair* p, *on peut poser*

$$p = P + Q + R + S,$$
$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S *étant des entiers, dont trois ont une somme algébrique égale à un carré.* (S. REALIS.)

Tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont égaux ; on a donc

$$p = x^2 + y^2 + 2z^2,$$

et l'on obtient la décomposition suivante :

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = (x+z)(x-z) + (x+z)(z+y) + (x+z)(z-y) + (y^2 + z^2 - 2xz),$$

qui satisfait aux conditions imposées.

1219. *Pour tout nombre entier* p, *de l'une des formes*

$$4n+1, \quad 4n+2, \quad 8n+3,$$

on peut poser

$$p = P + Q + R + S,$$
$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S *étant des entiers, tels que la somme algébrique*

$$P + Q + R + 3S$$

soit égale à un carré. (S. RÉALIS.)

Tout nombre de l'une des formes $4n+1$, $4n+2$,

$8n + 3$ est la somme de trois carrés; on a donc

$$p = x^2 + y^2 + z^2,$$

et l'on obtient la décomposition suivante :

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 - yz) + (y^2 - xz) + (z^2 - xy) + (xy + xz + yz)$$

qui satisfait aux conditions de l'énoncé.

Question 1230

(voir 2e série, t. XVI, p. 239);

Par M. BERTHOMIEU,
Élève du lycée de Bordeaux.

Soient O *un point fixe dans le plan du cercle* PQR, *et* OPQ *une sécante sur laquelle on prend un point* S, *de manière que* $OS = \lambda OP + \mu OQ$ (λ *et* μ *étant des constantes*); *démontrer que l'enveloppe d'une perpendiculaire à* PQ, *menée par le point* S, *est une conique.*

(R.-W. Genese.)

Soient C le centre du cercle, a son rayon, et $OC = c$.

Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le point O, et pour axe des x la droite OC; le cercle sera alors représenté par l'équation

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2,$$

et la droite OS par

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\sin\alpha} = \rho,$$

en sorte que OP et OQ sont racines de l'équation

$$\rho^2 - 2c\rho\cos\alpha + c^2 - a^2 = 0;$$

on a donc

$$OP = c\cos\alpha + \sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha},$$

$$OQ = c\cos\alpha - \sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha},$$

et par suite

$$\begin{aligned} OS &= \lambda OP + \mu OQ \\ &= c(\lambda + \mu)\cos\alpha + (\lambda - \mu)\sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha}; \end{aligned}$$

la perpendiculaire à PQ, menée par le point S, a, par conséquent, pour équation

$$\begin{aligned} &[x - c(\lambda + \mu)]\cos\alpha + y\sin\alpha \\ &\quad = (\lambda - \mu)\sqrt{a^2\cos^2\alpha + (a^2 - c^2)\sin^2\alpha}. \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit qu'elle est constamment tangente à la conique

$$\frac{[x - c(\lambda + \mu)]^2}{a^2(\lambda - \mu)^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)(\lambda - \mu)^2} = 1,$$

ce qui démontre la proposition.

Si $a > c$, c'est-à-dire si le point O est intérieur au cercle PQR, l'enveloppe est une ellipse; si $a < c$, c'est-à-dire si le point O est extérieur au cercle, l'enveloppe est une hyperbole.

Dans le cas particulier où $\mu = 0$ et $\lambda = 1$, l'enveloppe a pour équation

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

ce qui démontre cette proposition connue :

Si, par un point O, on mène des rayons vecteurs à un cercle C, l'enveloppe des perpendiculaires élevées à ces rayons par leurs extrémités est une conique qui a le point O pour foyer et le cercle C pour cercle principal.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ch. Brunot, élève

du lycée de Dijon; H. Picat, élève du lycée de Grenoble; A. Muffat, élève du lycée de Lyon; Barthe, élève du lycée de Bordeaux; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; G. Lambiotte, élève de l'École des Mines de Liége; E. Paturet; H. Lez; B. Launoy; E. Ambert, maître répétiteur au lycée de Montpellier; P. Cassani, professeur à l'Institut technique de Venise; P. Sondat; B. Robaglia; M. Couette; Jamet, professeur au lycée de Saint-Brieuc.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. MORET-BLANC.

Soit A un point quelconque du plan. Abaissons sur OPQ la perpendiculaire AV et joignons AS. Pour chaque position de la sécante, on a un rayon AV et un rayon AS; ces rayons, qui se correspondent un à un, forment deux faisceaux homographiques, dont les deux rayons doubles sont les tangentes qu'on peut mener du point A à l'enveloppe. Cette enveloppe est donc une courbe de seconde classe et par conséquent une conique.

Si le point O est intérieur au cercle, la conique a des tangentes parallèles à toutes les directions : c'est une ellipse. Si le point O est au centre du cercle, les tangentes à l'enveloppe sont équidistantes du centre : l'enveloppe est un cercle concentrique au premier.

Si le point O est extérieur au cercle, les tangentes à l'enveloppe sont perpendiculaires aux droites menées du point O dans l'angle TOT' des tangentes au cercle : cette enveloppe est donc une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires aux droites OT, OT'.

Si le point O est sur la circonférence, ou si $\lambda = \mu$, le lieu du point S est une circonférence passant par O; l'enveloppe est le point de cette circonférence diamétralement opposé au point O.

Note. — M. Laisant a résolu la question par la méthode des équipollences.

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES ;

PAR M. A. TISSOT,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

PRÉAMBULE.

Objet du Mémoire et de chacun des Chapitres en particulier.

Le présent Mémoire a pour objet l'étude de la déformation dans la représentation d'une surface sur une autre, notamment dans la construction des cartes géographiques.

Le premier Chapitre traite de la loi de la déformation et des propriétés générales qui en dérivent. Le deuxième est consacré à la résolution de cette question : *Trouver le mode de projection le mieux approprié à la représentation plane d'une contrée particulière.* Dans les deux derniers, on compare entre elles les diverses projections des cartes géographiques au point de vue de la déformation.

Nous commençons par établir en partie le lemme suivant, dont la démonstration se trouve complétée un peu plus loin : *Quel que soit le système de projection, il y a, en tout point de l'une des surfaces, deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, si les angles ne sont pas conservés, il y en a deux seulement, telles que les directions qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit.* De là résulte l'existence

de deux séries uniques de courbes orthogonales ayant aussi leurs projections orthogonales. En faisant varier de toutes les manières possibles le mode de succession des courbes de chaque série, on obtient une infinité de doubles canevas dont chacun décompose les deux surfaces en rectangles infiniment petits, et qui sont les seuls à posséder cette propriété dans le système de projection que l'on considère.

La déformation est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces ni du mode de représentation adopté : *Toute représentation d'une surface sur une autre peut être remplacée, autour de chaque point, par une projection orthogonale faite à une échelle convenable* (*). Le lemme établi préalablement permet de donner de cette loi une démonstration géométrique très-simple. En suivant une marche inverse, il serait facile de constater analytiquement qu'un cercle infiniment petit tracé autour d'un point quelconque de la première surface, dans le plan tangent en ce point, est remplacé sur la seconde par une ellipse, ce qui prouverait autrement la loi énoncée ainsi que le lemme (**). De cette loi découlent un grand nombre de propriétés (***).

(*) Dans les figures homographiques, les relations métriques sont une conséquence des relations descriptives (Mémoire de M. Chasles, faisant suite à l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*). Cette propriété fondamentale, dont Abel Transon a donné, dans les *Nouvelles Annales*, une démonstration analytique, se déduit immédiatement de la loi de la déformation.

(**) Cette loi et ce lemme ont leurs analogues dans la représentation des figures à trois dimensions.

(***) Dans le tome XLIX des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, nous avons publié, sans démonstration, les énoncés de ces propriétés et celui de la loi sur laquelle elles reposent. Depuis, ils ont été reproduits par M. A. Germain dans son *Traité des projections des cartes géographiques*, et par M. Ulysse Dini dans son Mémoire *Sopra*

Si l'on adopte comme unité le rayon du cercle infiniment petit, l'ellipse qui représente ce cercle et constitue une sorte d'*indicatrice* du mode de projection au point considéré aura ses dimensions exprimées par des nombres finis. Connaissant ses axes, on pourra calculer l'altération éprouvée par un angle donné, le *maximum* dont cette altération est susceptible, les rapports suivant lesquels les longueurs se trouvent modifiées dans les diverses directions, le plus grand et le plus petit de ces rapports, lesquels sont précisément égaux aux demi-axes, enfin l'altération de superficie. Quant aux longueurs et aux directions des axes, nous établirons les formules qui servent à les déterminer en fonction de deux coordonnées fixant à la fois la position de chaque point sur la première surface et celle de sa projection sur la seconde.

Ayant ainsi fourni le moyen d'étudier la déformation produite autour de chaque point, nous résoudrons d'autres questions dans lesquelles il s'agira de trouver sur les deux surfaces, soit les couples de séries de lignes, soit les doubles canevas remplissant certaines conditions, par exemple les séries de lignes sur lesquelles les longueurs se trouvent modifiées dans un rapport constant, ou, plus généralement, dans un rapport exprimé par une fonction

---

alcuni punti della teoria delle superficie (*Volumi dell' Accademia dei* XL, 3e série, t. I), accompagnés de démonstrations propres à ces deux auteurs, mais moins simples que celles que nous avions en vue et que nous donnons ici.

M. Dini a fait voir de plus que toute la théorie de la courbure des surfaces peut se déduire des propriétés générales dont nous venons de parler. Il y est parvenu en les appliquant à la représentation d'une surface sur une sphère, effectuée d'après la méthode de Gauss, méthode dans laquelle on considère comme points correspondants ceux pour les quels les normales sont parallèles.

Grâce à M. Faye, la loi de la déformation a aussi trouvé place dans le Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique.

connue des deux coordonnées, les doubles canevas formés de rectangles infiniment petits, ceux dont les angles varient suivant une loi donnée, ceux qui décomposent les surfaces en une infinité de losanges.

On appliquera les théories du premier Chapitre à deux modes particuliers de représentation plane d'une surface quelconque de révolution.

Dans le deuxième Chapitre, nous donnons le moyen de déterminer, pour les cartes de contrées d'une étendue comparable à celle de la France, quel est le système de projection qui occasionne la déformation la plus faible, non-seulement parmi ceux qui ont été considérés jusqu'à présent, mais parmi tous ceux qu'il serait possible d'imaginer. Afin de préciser davantage, disons qu'il s'agit d'un système qui, tout en ne produisant que des altérations d'angles de quelques secondes, par conséquent insignifiantes, réduise à son *minimum* la plus grande altération de longueur. Les coordonnées rectangulaires des divers points de la carte seront exprimées par des formules assez simples, les mêmes quel que soit le pays à représenter; certains paramètres qui figurent dans ces formules varient seuls d'un pays à l'autre; on en trouve les valeurs, dans chaque cas particulier, à l'aide d'un procédé graphique (*). Une méthode analogue serait applicable à la recherche d'un mode de projection qui, tout en n'altérant les aires que de quantités négligeables, réduirait à son *minimum* la plus grande altération d'angle dans la représentation d'un pays donné.

(*) Le tome LI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* renferme une Note dans laquelle nous avons fait connaître les formules et le procédé en question, et dont le tome XXI des *Monthly Notices of the Royal astronomical Society* a donné une traduction anglaise.

Les régions peu étendues dans tous les sens ne sont pas les seules pour lesquelles nous donnions le moyen de déterminer le meilleur mode de projection. Nous avons résolu la même question pour toute zone comprise entre deux parallèles dont la différence des latitudes n'atteint pas un trop grand nombre de degrés, et aussi pour tout fuseau limité par deux méridiens dont l'angle remplit une condition analogue.

Les applications porteront principalement sur les cartes de France, d'Espagne, d'Egypte et d'Algérie.

Les deux derniers Chapitres se composent presque exclusivement de tableaux renfermant environ huit mille nombres à l'aide desquels on pourra se rendre un compte exact de la déformation produite par les divers systèmes de projection qui ont été jusqu'ici adoptés ou seulement proposés pour la construction des cartes géographiques (*). Dans le Chapitre III, où l'on a en vue la représentation de tout un hémisphère, les tableaux se rapportent, pour la plupart, à des points situés de 15 en 15 degrés de latitude et de 15 en 15 degrés de longitude; dans le Chapitre IV, ils se rapportent à des points plus rapprochés sur des cartes de moindre étendue; en tout cas, ils font connaître principalement, pour chacun des points considérés, le *maximum* de l'altération d'angle,

(*) Dans le principe, nous nous étions borné à considérer onze systèmes de projection (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. L; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIX; *Cosmos*, année 1865). L'extension donnée depuis à notre travail en a retardé la publication, mais elle nous met à même aujourd'hui de fournir aux constructeurs de cartes de Géographie et aux personnes qui veulent faire de ces cartes un usage rationnel des documents utiles en grande quantité. C'est seulement à l'aide de documents de cette nature que l'on peut reconnaître, parmi les divers systèmes de projection, celui qui convient le mieux à la représentation d'une portion donnée de la surface terrestre.

en degrés et minutes, les valeurs extrêmes du rapport dans lequel les longueurs se trouvent modifiées, avec trois chiffres décimaux, enfin le rapport des éléments superficiels avec la même approximation. Les ensembles de formules qui nous ont servi à calculer ces résultats numériques varient d'un système de représentation à un autre, mais tous se déduisent des formules générales établies dans le premier Chapitre ; afin d'abréger, nous nous abstiendrons de les reproduire (*); seulement, à cause de la confusion qui règne dans la nomenclature des diverses projections, il sera nécessaire que nous donnions en quelques mots la définition de chacune d'elles.

Nos tableaux ne concernent pas seulement les modes de représentation qui ont été mentionnés jusqu'à présent, mais aussi certains autres que les considérations suivantes nous engagent à proposer. La plupart des projections sont susceptibles d'être réparties en groupes tels que, dans chacun, elles ne diffèrent les unes des autres que par la valeur d'un paramètre. Parmi ces groupes, il y en a dont toutes les projections conservent les angles, d'autres dans lesquels une seule projection jouit de cette propriété, d'autres enfin dans lesquels aucune ne la possède : on peut chercher, pour chacun de ces derniers, quelle est la valeur du paramètre qui réduit à son *minimum* la plus grande des altérations d'angles de la carte. Une question analogue se présente à propos des aires, de même aussi à propos des longueurs, qui du reste ne se trouvent conservées sur aucune projection. Les solutions des questions ainsi posées dépendent nécessairement de

(*) Nous comptons revenir ailleurs sur ce sujet. Dans le tome XXI du *Journal de l'École Polytechnique*, nous avons établi directement les formules relatives à la projection dite de *Bonne* ou du *Dépôt de la Guerre*.

l'étendue et de la forme des pays que l'on veut reproduire; celles que nous avons obtenues permettront de remplacer les projections actuellement en usage par d'autres plus avantageuses, et de représenter avec moins de déformation des portions considérables de la surface terrestre, telles qu'un hémisphère, les trois parties de l'ancien continent, les deux Amériques, l'empire russe, etc. (*A suivre.*)

SUR LA CARDIOÏDE;

PAR M. LAGUERRE.

1. La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle de même rayon.

C'est une courbe de troisième classe et du quatrième degré (*), ayant, par conséquent, une tangente double et trois points de rebroussement; deux de ces points de rebroussement sont les ombilics du plan. Les trois foyers de la courbe se réduisent à un seul foyer F, qui est le point de rencontre des tangentes menées aux ombilics.

La cardioïde peut donc être définie comme une courbe de *troisième classe, ayant une tangente double et un foyer singulier de rebroussement*.

2. Dans tout ce qui suit, je m'appuierai principalement sur les deux propositions suivantes :

PROPOSITION I (**). — *Si, par un point quelconque du*

(*) *Voir* SALMON, *Higher plane curves*, p. 270.

(**) *Voir* ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes algé-*

plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, et si l'on joint ce point aux trois foyers de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation, c'est-à-dire que la somme des angles que chacune des droites du premier faisceau fait avec une direction arbitraire est égale, à un multiple près de π, *à la somme des angles que font, avec cette même direction, les droites du second faisceau.*

Proposition II (*). — *Si, par un point quelconque* M *du plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, le centre harmonique des trois points de contact, relativement au point* M, *est le même que le centre harmonique des trois foyers relativement à ce même point. En d'autres termes, la polaire du point* M, *relativement au triangle formé par les normales menées à la courbe par les trois points de contact des tangentes, se confond avec la polaire du même point relativement au triangle formé par les droites menées par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui le joint au point* M.

3. Les foyers de la cardioïde se confondent tous les trois avec le foyer singulier F de cette courbe. On déduit donc immédiatement de la proposition I le théorème suivant :

Théorème I. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde, la somme des angles que font ces droites avec la droite* MF *est égale à un multiple de* π.

---

briques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, janvier 1865).

(*) *Voir* ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique*, février 1867).

La cardioïde a un troisième point de rebroussement réel R, et, d'après un théorème très-connu, la tangente en R passe par le point F. D'un point quelconque de la droite FR, on peut mener trois tangentes à la courbe, dont l'une se confond avec FR. Du théorème précédent il résulte que les deux autres tangentes sont également inclinées sur FR; donc :

La cardioïde est symétrique par rapport à l'axe FR.

4. La proposition II, appliquée à la cardioïde, donne de même le théorème suivant :

Théorème II. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde et les normales aux points de contact, le pied de la perpendiculaire, abaissée du point* M *sur sa polaire relativement au triangle formé par les normales, est le foyer de la courbe.*

Ce que l'on peut encore exprimer sous la forme suivante, plus commode dans les applications :

Soient N, N′, N″ *les normales menées aux trois points de contact et* Φ *la droite menée par le point* F *perpendiculairement à* FM; *si, par le point* M, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement les droites* N, N′, N″ *et* Φ *aux points* n, n', n'' *et* φ, *on a, entre ces points, la relation*

$$\frac{3}{M\varphi} = \frac{1}{Mn} + \frac{1}{Mn'} + \frac{1}{Mn''}.$$

5. Supposons, en particulier, que le point soit pris sur la droite FR; désignons par T ce point, par M le point de contact d'une des tangentes, distinctes de TF, que l'on peut mener à la courbe par le point T, enfin par N le point où la normale au point M rencontre l'axe FR. Il est clair que la normale menée par le troisième point de

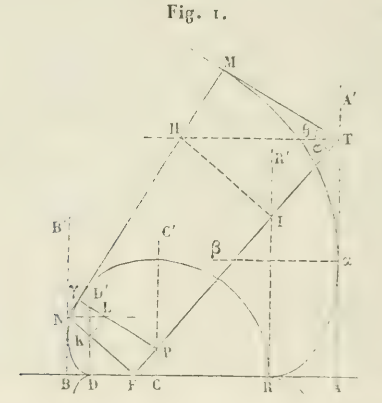
contact rencontrera également au point N l'axe de symétrie. En prenant donc pour sécante l'axe lui-même, l'équation précédente donnera la relation

$$(1)\qquad \frac{3}{\mathrm{TF}} = \frac{2}{\mathrm{TN}} + \frac{1}{\mathrm{TR}},$$

qui lie entre eux les points de rencontre de l'axe avec la tangente et la normale menées en un point quelconque de la courbe.

6. Soient (*fig.* 1) une cardioïde ayant pour foyer F, pour axe FA, et $A\alpha$ la tangente double de cette courbe,

Fig. 1.



α étant le point de contact situé au-dessus de l'axe.

Portons à gauche du foyer F une longueur $\mathrm{FB} = \dfrac{\overline{\mathrm{A}\alpha}^2}{\mathrm{FA}}$ et à gauche du point A une longueur $\mathrm{AR} = \dfrac{\mathrm{AF}}{3}$, puis aux points B, R et A élevons à l'axe des perpendiculaires BB', RR' et AA'.

Cela posé, par le point F, menons deux droites rectangulaires quelconques rencontrant respectivement les

droites BB′ et AA′ aux points N et T. Au point I, où la droite FT coupe RR′, menons une perpendiculaire à FT et appelons H le point où cette perpendiculaire rencontre la parallèle à l'axe menée par le point T; menons enfin la droite NH.

Je dis que *la perpendiculaire abaissée du point* T *sur* NH *est tangente à la cardioïde, le point de contact étant précisément le pied* M *de cette perpendiculaire, en sorte que* MN *est normale à la courbe.*

Pour le démontrer, je ferai remarquer que, des trois tangentes que l'on peut mener à la courbe par le point T, deux se confondent avec la tangente double, leurs points de contact étant d'ailleurs le point α et son symétrique α' par rapport à l'axe. Les normales en ces deux points sont les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ parallèles à l'axe. La troisième tangente touche la courbe en un point variable avec la position du point T; désignons pour un instant par Δ la normale au point de contact.

Il suit du théorème II que la polaire du point T relativement à la droite NF (cette droite étant considérée comme triple) se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ et Δ.

Les triangles semblables BNF et FAT donnent la relation

$$BN \times AT = BF \times FA = \overline{A\alpha}^2;$$

de là résulte que la polaire du point T, relativement aux droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, est la droite NL menée par le point N parallèlement à l'axe.

La proposition précédente peut par suite s'énoncer ainsi : La polaire du point T relativement à la droite Δ et à la droite NL (cette dernière étant considérée comme double) se confond avec la polaire de ce point relativement à FN (cette dernière droite étant consi-

dérée comme triple); et de là résulte d'abord que la droite Δ passe par le point N.

Pour en déterminer un autre point, menons par le point T une parallèle à l'axe; soient Q (*) le point où cette parallèle rencontre NF, et H le point où elle rencontre Δ.

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, on aura

$$\frac{3}{TQ} = \frac{1}{TH}.$$

Menons par le point H une perpendiculaire à FT; en désignant par I' son pied, on voit que les deux triangles FQT et I'HT sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{I'T}{FT} = \frac{HT}{TQ} = \frac{1}{3};$$

IT est dans le tiers de FT et le point I' se confond avec le point I.

La proposition précédente est donc entièrement démontrée.

Elle donne un moyen facile de mener à la cardioïde une tangente par un point quelconque de la tangente double, ou encore de lui mener une normale par un point quelconque de la droite BB' qui, il est facile de le voir, passe par les deux points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe.

En particulier, on en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Si, par un point quelconque de la cardioïde, on mène la tangente et la normale à la courbe et si l'on désigne par* T *le point où la tangente rencontre la tangente double* AA', *par* N *le point où la*

(*) Les points Q et α', ainsi que la droite $\alpha'\beta'$, ne se trouvent pas sur la figure; le lecteur est prié d'y suppléer.

normale rencontre la droite BB′ *qui joint les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe, les deux points* T *et* N *sont vus du foyer suivant un angle droit.*

7. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles.

Au point α la normale rencontre l'axe à l'infini et la tangente le rencontre au point A ; en désignant, pour un instant, par R′ le point de rebroussement de la courbe, on aura donc, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{AF} = \frac{1}{AR'},$$

d'où AR′ = AR. Le point R est donc le point de rebroussement.

Si l'on considère l'un des points situés sur la droite BB′ et où la tangente est horizontale, le point de rencontre de la tangente avec l'axe est à l'infini et le point de rencontre de la normale est en B. En vertu de la relation (1), on aura donc

$$BR = 3BF, \quad \text{d'où} \quad BF = RA = \frac{FA}{3}.$$

Les tangentes que l'on peut mener à la courbe du point T sont, d'une part, la droite TM et, d'autre part, la droite Tα, cette dernière étant comptée deux fois.

En vertu du théorème I, on a donc

$$\widehat{MTI} + 2\widehat{A'TI} = \text{mult. } \pi;$$

ou, si l'on pose,

$$\widehat{HTI} = \varphi \quad \text{et} \quad \widehat{MTH} = \theta,$$

$$\theta + 3\varphi = \pi.$$

Au moyen des équations précédentes, il est facile d'établir un grand nombre de relations entre les éléments

de la *fig.* 1 ; je me bornerai à mentionner les suivantes :

$$NM = NF + AB \sin\varphi,$$

$$TF = TM + AB \cos\varphi.$$

8. Le point D étant déterminé par la relation $BD = \frac{BC}{3}$, élevons en ce point une droite DD′ perpendiculaire à l'axe ; soit K le point où cette perpendiculaire coupe NF. Menons KL perpendiculaire à NF et NL parallèle à l'axe ; abaissons enfin, du point de rencontre L de ces deux lignes, une perpendiculaire sur la normale MN.

Je dis que *le point* γ, *où elle rencontre cette normale, est le centre de courbure de la cardioïde au point* M.

Soit, en effet, P le point où cette droite coupe FT, on démontrera aisément, en s'appuyant sur les propositions précédentes, que

$$FP = \frac{1}{9} FT;$$

par suite, le point P décrit, lorsque le point M se déplace sur la courbe, une droite perpendiculaire à l'axe et dont le pied est à une distance

$$FC = \frac{1}{3} FB.$$

En se reportant à ce que j'ai dit plus haut, on voit aisément que la normale NM enveloppe une cardioïde ayant pour tangente double BB′ et pour foyer le point F.

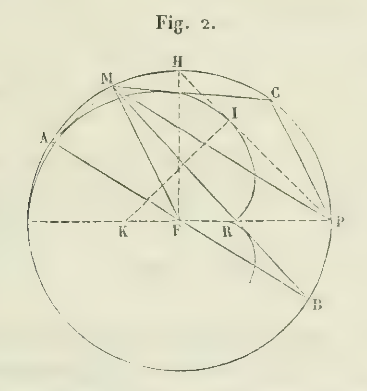
Le point de contact de la normale avec l'enveloppe est le point γ ; ce qui démontre la proposition énoncée.

On voit aussi que la développée de la cardioïde est une cardioïde semblable à la proposée, le rapport de réduction étant $\frac{1}{3}$, proposition d'ailleurs bien connue.

9. Un autre mode de génération de la cardioïde mérite d'être signalé.

Soient (*fig.* 2) un cercle ayant pour centre F et un point fixe P pris sur cette courbe. Par le point P menons une sécante quelconque coupant le cercle en M; par le centre F menons une parallèle à cette sécante rencontrant le cercle aux points A et B, joignons enfin MA et MB. Ces droites enveloppent, lorsqu'on fait varier la direction de la sécante, une courbe qui est évidemment de troisième classe et unicursale.

Fig. 2.



Si l'on cherche les tangentes *isotropes* que, d'après la construction précédente, on peut mener à la courbe, on trouve facilement qu'elles passent par le point F; d'ailleurs la courbe n'est évidemment pas tangente à la droite de l'infini.

On en conclut que cette courbe est de *troisième classe, unicursale, et à foyer singulier triple,* par conséquent c'est une *cardioïde.* Quelques propriétés intéressantes se déduisent du mode de génération que je viens d'indiquer.

Il est facile, en premier lieu, de trouver le point de rebroussement de la courbe. Je remarquerai, à cet effet,

que si, au point F, on élève une perpendiculaire au rayon FP, la droite HP est une tangente à la courbe et qui la touche au point I déterminé par la relation

$$\mathrm{HI} = \frac{\mathrm{HP}}{3}.$$

Au point I, menons la normale à la courbe et soit K le point où elle rencontre l'axe, en désignant par R le point de rebroussement de la cardioïde; on aura, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{\mathrm{PF}} = \frac{2}{\mathrm{TK}} + \frac{1}{\mathrm{PR}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{FR} = \frac{\mathrm{FP}}{3}.$$

Considérons, en second lieu, un point quelconque M du cercle; si, par F, on mène une parallèle à MP rencontrant le cercle aux points A et B, deux des tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe sont les droites MA et MB.

La troisième tangente s'obtiendrait en menant par le point P une parallèle à MF et en joignant au point M le point C où cette parallèle coupe le cercle.

On voit que les deux tangentes MA et MB sont à angle droit; d'où la proposition suivante :

Théorème IV. — *Si, d'un point quelconque du cercle* K *passant par le sommet de la cardioïde et ayant pour centre son foyer, on mène les tangentes à la courbe, deux de ces tangentes sont rectangulaires* (*).

10. Considérons (*fig.* 2) les deux points M et C qui

(*) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les courbes unicursales de troisième classe*, communiquée à la Société mathématique en novembre 1877.

sont les extrémités d'une corde tangente à la cardioïde; on voit immédiatement sur la figure que l'arc MH est la moitié de l'arc PC.

La cardioïde peut donc être considérée *comme l'enveloppe de la corde qui joint deux points mobiles sur un cercle, ces deux points décrivant le cercle dans le même sens et l'un ayant une vitesse double de la vitesse de l'autre.*

Supposons que les deux points M et C se soient déplacés infiniment peu et soient venus en M′ et C′; désignons par T le point de rencontre de MC et de M′C′. On aura $MM' = \frac{1}{2} CC'$; d'autre part, les triangles semblables MM′T et CC′T donnent

$$\frac{MM'}{CC'} = \frac{MT}{TC'} = \frac{1}{2}.$$

A la limite on a

$$MT = \frac{TC}{2};$$

donc :

Théorème V. — *La corde interceptée par le cercle* K *sur une tangente quelconque à la cardioïde est partagée par le point de contact en deux segments dont l'un est le double de l'autre.*

11. D'autres propriétés des normales à la cardioïde peuvent être déduites par des considérations entièrement différentes de celles qui précèdent, et en s'appuyant seulement sur la propriété suivante, à savoir que :

La cardioïde ayant un axe de symétrie et ayant pour points de rebroussement les ombilics du plan, tout cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la portion de la courbe située au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

De là résulte immédiatement la proposition suivante (*) :

Théorème VI. — *Étant pris deux points fixes quelconques* A *et* B *sur la cardioïde, soit* C *un point mobile sur cette courbe ; sur les milieux des cordes* CA *et* CB, *élevons respectivement des perpendiculaires à ces cordes et soient* I *et* K *les points où ces perpendiculaires coupent l'axe. Quelle que soit la position du point* C *sur la courbe, la différence*

$$\frac{1}{FI} - \frac{1}{FK}$$

demeure constante.

Démonstration. — Je supposerai, pour fixer les idées, que les points A, B, ainsi que le point mobile C, sont sur la partie de la courbe située au-dessus de l'axe ; et, pour plus de clarté, je considérerai d'abord, au lieu de la cardioïde, une *spirique* quelconque, c'est-à-dire une courbe du quatrième ordre, ayant un axe de symétrie et pour points doubles les deux ombilics du plan. Une spirique, comme on le voit aisément, jouit de la propriété qu'un cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la courbe qu'en deux points situés au-dessus de l'axe et distincts des ombilics.

Cela posé, A et B désignant deux points fixes de la spirique et C un point variable sur cette courbe, par les milieux des cordes CA et CB élevons des perpendiculaires à ces droites ; soient I et K les points où ces perpendiculaires coupent respectivement l'axe de la spirique.

(*) Les considérations qui suivent s'appliquent également aux coniques et aux anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre qui ont un axe de symétrie. *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les spiriques* (*Bulletin de la Société philomathique*, novembre 1869).

J'établirai d'abord que les points I et K déterminent sur l'axe, lorsque le point C se déplace, une division homographique.

En effet, le point I étant donné, le point C se trouve au-dessus de l'axe et à l'intersection de la courbe avec le cercle décrit du point I comme centre avec IA pour rayon ; ce point est donc parfaitement déterminé, puisque ce cercle ne rencontre la courbe au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

Le point C étant déterminé, le point K l'est également quand on se donne le point I, et l'on prouverait de même qu'à une position du point K correspond une position unique du point I; d'où il résulte que *les points* I *et* K *déterminent sur l'axe une division homographique.*

Cherchons ses deux points doubles. Le point C se déplaçant sur une des branches infinies qui passe à un ombilic ω en se rapprochant indéfiniment de cet ombilic, le cercle passant par les points A et C, et symétrique par rapport à l'axe, a pour centre, à la limite, le point où la tangente en ω, à la branche de courbe considérée, perce l'axe, c'est-à-dire le foyer singulier f correspondant à cette branche de courbe. Ce point est, par la même raison, le centre du cercle limite passant par les points B, C et symétrique par rapport à l'axe; f est donc un point double de la division homographique. Le même raisonnement s'appliquerait à la seconde branche de courbe.

Ainsi, quand on considère une *spirique générale, les deux points doubles de la division homographique, formée par les points* I *et* K, *sont les foyers singuliers de la courbe.*

Dans le cas particulier de la *cardioïde,* les points doubles à l'infini deviennent des points de rebroussement et les deux foyers singuliers viennent se réunir au foyer

unique F de la courbe. La division homographique formée par les points I et K a donc deux points doubles coïncidents en F; d'où le théorème qu'il fallait démontrer.

12. Supposons que l'on fasse successivement coïncider le point mobile C avec A et avec B; dans le premier cas, la perpendiculaire élevée au milieu de AC se confond avec la normale en A et, dans le second, la perpendiculaire élevée au milieu de BC se confond avec la normale en B.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème VII. — *Étant donnés deux points quelconques* A *et* B *situés sur une cardioïde, menons les normales en ces points et, par le point milieu de la corde* AB, *une perpendiculaire à cette corde; soient respectivement* a, b, i *les points où ces droites rencontrent l'axe, le point i et le foyer* F *de la courbe divisent harmoniquement le segment ab.*

En effet, en supposant que le point mobile C vienne successivement coïncider avec le point A et le point B et en appliquant le théorème précédent, on a

$$\frac{1}{FI} - \frac{1}{Fa} = \frac{1}{Fb} - \frac{1}{FI},$$

d'où

$$\frac{2}{FI} = \frac{1}{Fa} + \frac{1}{Fb}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, si le point B est un des points où la tangente double touche la cardioïde, le point de rencontre de la normale avec l'axe étant à l'infini, on a cette proposition :

Si l'on désigne par a le point où la normale en un point A *de la cardioïde rencontre l'axe, et par i le*

point où cet axe est rencontré par la droite élevée par le milieu de la corde, qui joint A *à l'un des points où la courbe touche la tangente double, et perpendiculairement à cette corde, le point* a *est le milieu du segment* FI.

13. Je m'arrêterai ici dans cette étude des propriétés des normales à la cardioïde. Dans une prochaine Note, je ferai l'application des mêmes principes à l'étude de diverses courbes remarquables de la troisième classe et de classes plus élevées.

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[FIN (*).]

Propriétés de quatre surfaces passant par les mêmes points.

168. Lorsque la droite ε' coïncide avec la droite ε, la relation $(2)'$ du n° 148 devient

$$0 = \mathrm{I}_\varepsilon - \varphi \sum \frac{|\varepsilon\nu|^2}{|\gamma\nu|^2} \frac{\mathrm{I}_a \mathrm{I}'_b + \mathrm{I}_b \mathrm{I}'_a}{\overline{ab}^2} + \varphi^2 \mathrm{I}'_\varepsilon,$$

de sorte que, si φ_1 et φ_2 sont les paramètres des deux

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289, 508, 541.

surfaces du système qui touchent la droite ε,

$$\varphi_1\varphi_2 = \frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon},$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{l}{I'_\varepsilon}, \quad \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} = \frac{l}{I_\varepsilon},$$

l étant le coefficient de $-\varphi$ dans l'équation écrite ci-dessus.

De la première de ces relations résulte ce théorème :

Quatre surfaces passant par les mêmes points, si l'on mène une tangente commune ε à deux d'entre elles, le rapport $\frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon}$ des indices de cette droite par rapport aux deux autres S *et* S' *est constant, quelle que soit cette tangente.*

En remplaçant le rapport $\frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon}$ par ses valeurs, on pourra donner à ce théorème des énoncés différents, analogues à ceux indiqués (164).

Interprétation géométrique du coefficient l.

169. Désignons par g et h les points de contact de la droite ε avec les deux surfaces du système, qui touchent cette droite,

$$\varphi_1 = \frac{I_g}{I'_g}, \quad \varphi_2 = \frac{I_h}{I'_h};$$

de sorte que

$$\frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h} = \frac{l}{I'_\varepsilon}, \quad \frac{I'_g}{I_g} + \frac{I'_h}{I_h} = \frac{l}{I_\varepsilon}.$$

Nous savons (154) que les points g et h sont conjugués à toutes les surfaces du système. Or il résulte du théorème (68, b) que, si l'on prend sur une droite fixe ε deux points g et h conjugués à S', la somme $\frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h}$ est con-

stante, et que, si ces points sont conjugués à S, la somme $\frac{I'_g}{I_g} + \frac{I'_h}{I_h}$ est aussi constante quels que soient les points g et h. Il suit de là que, si ces sommes sont nulles, la droite ε coupera la surface S en deux points g et h conjugués à S′ et la surface S′ en deux points conjugués à S.

Ainsi *l'équation* $l = 0$ *représente le complexe des droites qui coupent les surfaces* S *et* S′ *en quatre points harmoniques.*

Les droites du complexe sont donc caractérisées par cette propriété; si, sur l'une d'elles, on prend deux points g et h conjugués soit à S, soit à S′, la somme des paramètres des surfaces du système, qui passent par ces points, est nulle; par conséquent, pour avoir des droites du complexe, il suffira de construire les deux surfaces du système

$$(\varphi) \quad \frac{(a, E)^2}{I_a + \varphi I'_a} + \frac{(b, E)^2}{I_b + \varphi I'_b} + \frac{(c, E)^2}{I_c + \varphi I'_c} + \frac{(d, E)^2}{I_d + \varphi I'_d} = 0,$$

$$(-\varphi) \quad \frac{(a, E)^2}{I_a - \varphi I'_a} + \frac{(b, E)^2}{I_b - \varphi I'_b} + \frac{(c, E)^2}{I_c - \varphi I'_c} + \frac{(d, E)^2}{I_d - \varphi I'_d} = 0,$$

et de mener à ces surfaces des tangentes communes; en donnant à φ toutes les valeurs possibles, on aura toutes les droites du complexe.

En éliminant φ entre ces deux équations, on trouve que les plans tangents aux surfaces (φ) et $(-\varphi)$ enveloppent la surface

$$m.m' = I_E I'_E.$$

Cette surface, qui joue un rôle important dans l'étude du complexe, peut se mettre sous ces deux formes

$$0 = \sum \frac{(a, E)^2}{I_a - \frac{m}{I'_E} I'_a}, \quad 0 = \sum \frac{(a, E)}{\frac{m'}{I_E} I_a - I'_a}.$$

Il est aisé de le vérifier, mais on y est conduit par la considération suivante. Soit F un plan qui touche les surfaces (φ) et $(-\varphi)$; il y a une troisième surface du système qui touche ce plan, et son paramètre φ' est déterminé par la relation

$$\varphi - \varphi + \varphi' = \frac{m}{\mathrm{I}'_{\mathrm{F}}},$$

en écrivant, dans m, F au lieu de E. Ainsi cette troisième surface a pour équation

$$0 = \sum \frac{(a, \mathrm{E})^2}{\mathrm{I}_a - \frac{m'}{\mathrm{I}'_{\mathrm{F}}} \mathrm{I}'_a};$$

mais puisque, en faisant varier le plan F, on peut faire en sorte que cette surface touche tous les plans tangents communs aux surfaces (φ) et $(-\varphi)$, il est évident qu'en remplaçant le plan F par le plan variable E on obtiendra l'équation de la surface enveloppée par ces plans tangents, c'est-à-dire la première des équations écrites plus haut. La seconde s'obtient d'une manière analogue, en observant que

$$\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi'} = \frac{m'}{\mathrm{I}_{\mathrm{F}}},$$

en remplaçant dans m' le plan E par le plan F.

Si l'on désigne par e et f deux points quelconques pris sur la droite ε, on a

$$l.\overline{ef}^2 = \sum \begin{vmatrix} (e, \mathrm{A}) & (f, \mathrm{A}) \\ (e, \mathrm{B}) & (f, \mathrm{B}) \end{vmatrix}^2 \frac{\mathrm{I}_a \mathrm{I}'_b + \mathrm{I}_b \mathrm{I}'_a}{(a, \mathrm{A})^2 (b, \mathrm{B})^2}.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme très-simple (151)

$$l.\overline{ef}^2 = \mathrm{I}_e \mathrm{I}'_f + \mathrm{I}_f \mathrm{I}'_e - 2\mathrm{I}_{ef} \mathrm{I}'_{ef}.$$

Si le point f est un point fixe donné,

$$\mathrm{I}_e \mathrm{I}'_f - \mathrm{I}_f \mathrm{I}'_e = 0$$

est l'équation de la surface qui passe par la courbe SS' et par le point f; son paramètre φ est égal à $\frac{I_f}{I'_f}$; par conséquent,

$$I_e I'_f + I_f I'_e = 0$$

est l'équation de la surface qui passe par cette même courbe et dont le paramètre a pour valeur $-\frac{I_f}{I'_f}$ ou $-\varphi$. D'ailleurs les équations

$$I_{ef} = 0 \quad \text{ou} \quad I'_{ef} = 0$$

représentent respectivement les plans polaires du point f par rapport aux surfaces S et S'.

D'après cela, l'équation

$$l = 0 \quad \text{ou} \quad I_e I'_f + I_f I'_e - 2 I_{ef} I'_{ef} = 0$$

nous montre que, pour avoir les droites du complexe, qui passent par le point f, on construira la surface $-\varphi$ du système dont le paramètre est égal et de signe contraire à celui de la surface du système qui passe par le point f, on prendra ensuite les plans polaires du point f par rapport aux surfaces S et S', et l'on fera passer un cône par le point f, et l'intersection de la surface $-\varphi$ par l'un ou l'autre de ces plans polaires. Les arêtes de ce cône sont les droites du complexe qui passent par le point f.

170. Considérons trois surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, passant par l'intersection SS'. On peut, d'une infinité de manières, tracer des triangles conjugués à S, dont les sommets a, b, c soient situés respectivement sur les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3. Prenons le pôle d du plan abc par rapport à S; nous formons ainsi un tétraèdre $abcd$ conjugué à S, et nous savons alors (68, b) que $\sum \frac{I'_a}{I_a} = \text{const.}$

Or, si φ_1, φ_2, φ_3 sont les paramètres des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, on a

$$I_a - \varphi_1 I'_a = 0, \quad I_b - \varphi_2 I'_b = 0, \quad I_c - \varphi_3 I'_c = 0,$$

de sorte que, les trois premiers rapports qui figurent dans l'expression écrite ci-dessus étant constants, le quatrième $\frac{I'_d}{I_d}$ est aussi constant, et par conséquent (158) le point d décrit une surface Φ_4 qui passe aussi par la courbe SS'. Nous connaissons huit points de la surface S_4; car, si nous menons un plan E qui touche les trois surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, les points de contact déterminent (154) un triangle conjugué à S; donc le pôle de ce plan E, par rapport à S, sera sur la surface Φ_4. De là ce théorème :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *passant par les mêmes points, si les sommets a, b, c d'un triangle conjugué à* S *sont situés respectivement sur les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le pôle du plan abc pris par rapport à* S *décrira une surface* Φ_4, *qui passera par les points communs aux surfaces données et par les pôles (par rapport à* S*) des huit plans tangents communs aux surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3.

D'où le suivant :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *passant par les mêmes points, si les sommets a, b, c d'un triangle conjugué à* S *sont situés respectivement sur les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le plan de ce triangle enveloppera une surface* Σ *qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et qui sera inscrite à la développable formée par les plans menés à la surface* S *en ses points d'intersection avec les autres surfaces.*

Cette surface Σ est d'ailleurs conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces données.

Corollaires. — 1° *Lorsque quatre surfaces* S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *passent par les mêmes points, on peut construire une surface* Σ *qui touche les huit plans tangents communs aux surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *ainsi que les plans tangents de* S *menés en ses points d'intersection avec les autres surfaces.*

2° On prend pour S un cône. *Étant donnés trois surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et un cône ayant la même courbe d'intersection, si l'on prend sur ces surfaces respectivement trois points a, b, c, tels que les droites da, db, dc, menées au sommet d du cône, soient des diamètres conjugués de ce cône, le plan abc enveloppera une surface* Σ *qui sera inscrite au cône et qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces données.*

Si, dans ce corollaire, on prend pour cône celui qui, ayant pour sommet le centre de Φ_1, passe par le cercle imaginaire de l'infini, nos surfaces sont homocycliques, et nous voyons que :

Étant données trois surfaces homocycliques Φ_1, Φ_2, Φ_3, *si l'on prend sur chacune d'elles des points a, b, c tels que le trièdre oabc, dont le sommet est au centre commun o, soit trirectangle en o, le plan abc enveloppera une sphère qui touchera les huit plans tangents communs aux surfaces données.*

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

proposée au concours d'agrégation en 1875;

Par M. GAMBEY.

Déterminer les positions d'équilibre de deux poids égaux p, mobiles sans frottement sur une circonférence

fixe, située dans un plan vertical, et sur une tige rectiligne pouvant librement tourner autour d'un point A, pris sur le diamètre horizontal de la circonférence.

On négligera les dimensions des poids mobiles.

Soient M et M′ les positions des poids p; O le centre de la circonférence; OB le rayon sur lequel est pris le point A; posons enfin

$$\mathrm{MAB} = \alpha, \quad \mathrm{MOB} = \beta.$$

Les réactions dues à la résistance de la circonférence étant normales à cette courbe n'influent pas sur le mouvement des poids; on peut donc les négliger. Il suffira d'évaluer les composantes tangentielles des poids mobiles, et d'écrire que leurs moments, par rapport au point fixe, sont égaux; ce qui donne

$$\mathrm{AM}\cos\beta = \mathrm{AM'}\cos(2\alpha - \beta).$$

Les triangles OAM, OAM′ donnent en outre

$$\frac{\mathrm{AM}}{\sin\beta} = \frac{\mathrm{OM}}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{AM'}}{\sin(2\alpha - \beta)}.$$

On déduit aisément de ces relations

$$\sin 2\beta = \sin(4\alpha - 2\beta);$$

ce qui exige que l'on ait

$$4\alpha - 2\beta = 2\mathrm{K}\pi + 2\beta,$$

d'où

(1) $$\alpha = \mathrm{K}\frac{\pi}{2} + \beta;$$

ou bien

$$4\alpha - 2\beta = (2\mathrm{K} + 1)\pi - 2\beta,$$

d'où

(2) $$\alpha = \mathrm{K}\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Mais l'angle $\widehat{OMA} = \alpha - \beta$ ne peut être droit; donc il faut se borner à la relation (2).

Si l'on y donne à K toutes les valeurs entières à partir de zéro, on obtiendra toutes les positions d'équilibre :

$$\text{pour } K = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{pour } K = 1, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

Les valeurs suivantes de K reproduiraient les deux positions déjà obtenues.

Ainsi la tige doit être à 45 degrés sur le diamètre horizontal de la circonférence. Il est facile de distinguer la position d'équilibre stable par cette considération que le centre de gravité du système des deux poids doit être le plus bas possible.

Cette même considération donne immédiatement une solution géométrique de la question. Cela revient, en effet, à chercher le point le plus bas et le point le plus haut du lieu géométrique des milieux des cordes qui passent par le point A. Or on sait que ce lieu est une circonférence ayant pour diamètre OA. On retrouve ainsi les résultats précédents.

(*) La même question a été résolue par M. Duranton, chargé de cours au lycée du Puy.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1875;

PAR M. GAMBEY.

A un ellipsoïde donné on circonscrit une série de surfaces du deuxième ordre Σ, la courbe de contact

étant l'intersection de l'ellipsoïde par un plan fixe P. *On circonscrit ensuite à chaque surface* Σ *un cône ayant pour sommet un point donné* A :

1° *Trouver le lieu des courbes de contact des cônes et des surfaces* Σ;

2° *Classer les surfaces qui forment le lieu quand on suppose le plan* P *fixe et le point* A *mobile dans l'espace.*

On déterminera, pour chacune des variétés du lieu, les surfaces qui limitent les régions de l'espace où se trouve alors le point A.

L'équation d'un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués de longueurs a, b, c, choisis de manière que le plan des xy soit parallèle au plan P, étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

si l'on déplace parallèlement à lui-même le plan des xy, de manière qu'il coïncide avec le plan P, cette équation deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

h étant la distance de la nouvelle origine à l'ancienne.

L'équation générale des surfaces Σ sera alors

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} - 1 - \lambda z^2 = 0,$$

et celle du plan polaire du point A (α, β, γ) par rapport à ces surfaces

$$(2)\qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{h + \gamma - \lambda c^2 \gamma}{c^2} z + \frac{h^2 - c^2 + h\gamma}{c^2} = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe de contact dont on cherche le lieu satisfaisant aux équa-

tions (1) et (2), on obtiendra ce lieu en éliminant λ entre ces deux équations, ce qui donne

$$(S) \quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{hz^2}{c^2}-\frac{\beta yz}{b^2}-\frac{\alpha zx}{a^2} \\ &\qquad +\frac{h\gamma+K^2}{c^2}z-\frac{K^2\gamma}{c^2}=0, \end{aligned} \right.$$

en posant $c^2-h^2=K^2$.

On peut encore écrire ainsi cette équation

$$(S)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\gamma\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z+h)^2}{c^2}-1\right] \\ &-z\left[\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{(\gamma+h)(z+h)}{c^2}-1\right]=0. \end{aligned} \right.$$

Discussion. — On constate facilement, en supposant $K^2>0$:

1° Que toutes les surfaces (S) passent par le point A et par le pôle du plan P, point qui a pour coordonnées

$$x=0, \quad y=0, \quad z=\frac{K^2}{h};$$

2° Qu'elles ont en commun l'ellipse

$$z=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{K^2}{c^2}=0,$$

et, par suite, ne peuvent être des *paraboloïdes hyperboliques* ni des *cylindres paraboliques;*

3° Que, pour $\gamma>0$, elles représentent des *hyperboloïdes*, et pour $\gamma=0$ deux plans dont l'un est le plan P et l'autre le plan polaire du point A par rapport à l'ellipsoïde;

4° Enfin qu'elles sont *bitangentes* à l'ellipsoïde, comme le montre la forme (S)', et qu'elles le coupent suivant le plan P et le plan polaire du point A.

Gardant les hypothèses $\gamma \gtrless 0$ et $K^2>0$, nous classe-

rons les surfaces (S) en employant la décomposition en carrés.

Multipliant par 4γ, deux carrés se forment immédiatement, et l'on obtient

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{2\gamma x - \alpha z}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\gamma y - \beta z}{b}\right)^2 - Pz^2 \\ &\qquad + \frac{4\gamma(h\gamma + K^2)z}{c^2} - \frac{4K^2\gamma^2}{c^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

après avoir posé

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{4h\gamma}{c^2} = P.$$

Distinguons maintenant deux cas :

I. $P \gtrless 0$. Multiplions par P l'équation (3) et formons le carré par rapport à z ; il vient

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &P\left(\frac{2\gamma x - \alpha z}{a}\right)^2 + P\left(\frac{2\gamma y - \beta z}{b}\right)^2 - \left[Pz - \frac{2\gamma(h\gamma + K^2)}{c^2}\right]^2 \\ &\quad = \frac{4\gamma^2}{c^2}\left[K^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) - \frac{(h\gamma - K^2)^2}{c^2}\right]. \end{aligned} \right.$$

On peut encore, par une transformation facile, écrire ainsi le second membre :

$$\frac{4\gamma^2}{c^4}\left[c^2K^2P - (h\gamma + K^2)^2\right].$$

Posant

$$\frac{2\gamma x - \alpha z}{a} = A, \quad \frac{2\gamma y - \beta z}{b} = B, \quad Pz - \frac{2\gamma(h\gamma + K^2)}{c^2} = C,$$

$$\frac{4\gamma^2}{c^2}\left[K^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) - \frac{(h\gamma - K^2)^2}{c^2}\right] = Q,$$

l'équation (4) prendra la forme caractéristique

$$(I)\qquad PA^2 + PB^2 - C^2 = Q.$$

II. $P = 0$. Si P est nul, on ne peut plus multiplier

par P; mais, en annulant cette quantité (3), on obtient la forme ci-dessous

$$\text{(II)} \qquad A^2 + B^2 + D = 0,$$

après avoir posé

$$4\gamma\left(\frac{h\gamma + K^2}{c^2}\right)z - \frac{4K^2\gamma^2}{c^2} = D.$$

On voit que, P étant négatif, on aura des *ellipsoïdes réels,* parce que Q est alors nécessairement négatif, sauf pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{K^2}{h}$, auquel cas les surfaces (S) se réduisent à un point, le point A, pôle du plan P. Tandis que, pour $P > 0$, on aura des *hyperboloïdes à une nappe,* si Q est positif, des *cônes* réels pour $Q = 0$, et des *hyperboloïdes à deux nappes,* si Q est négatif.

Si $P = 0$, on aura des *paraboloïdes elliptiques*, à moins que D ne se réduise à une constante, ce qui arrivera, si l'on a aussi $Q = 0$. En effet, la seconde forme de Q montre que, si l'on a simultanément $P = 0$, $Q = 0$, on a nécessairement $h\gamma + K^2 = 0$, et, par suite, D se réduit à $-\frac{4K^2\gamma^2}{c^2}$. Dans ce cas l'équation (II) sera celle d'un *cylindre elliptique* dont l'axe est défini par les équations $A = 0$, $B = 0$.

Avant de poursuivre cette discussion, étudions la nature et la position des surfaces représentées par les équations $P = 0$, $Q = 0$, où nous regarderons α, β, γ comme les coordonnées courantes d'un point.

La première représente un *paraboloïde elliptique,* tangent à l'origine au plan P et situé tout entier du côté des z négatifs; ses diamètres sont parallèles à l'axe des z.

La deuxième représente un *cône,* ainsi que le montre la première forme de Q, abstraction faite du facteur

$\frac{4\gamma^2}{c^2}$, qui n'est pas nul. La seconde forme de Q montre que ce cône est circonscrit au paraboloïde $P = 0$, la courbe de contact étant l'intersection du plan $h\gamma + K^2 = 0$ avec le paraboloïde. Il en résulte que le plan P est à égale distance du centre de cette courbe et du sommet du cône $Q = 0$. Du reste, le sommet de ce cône est le pôle du plan P; d'où il suit qu'il est aussi circonscrit à l'ellipsoïde.

Nous pouvons maintenant délimiter nettement les diverses régions occupées par le point A quand l'équation (S) représente telle ou telle surface. Ces régions sont au nombre de *trois* :

1° Celle qui occupe l'intérieur du paraboloïde $P = 0$, et pour tous les points de laquelle on a $P < 0$. Elle correspond aux ellipsoïdes de l'équation (S); car, à cause de la position du cône $Q = 0$, on a nécessairement pour les points de cette région $Q < 0$.

2° Celle qui est située à l'intérieur du cône, mais à l'extérieur du paraboloïde, et pour tous les points de laquelle on a $P > 0$ et $Q < 0$. Elle correspond aux hyperboloïdes à deux nappes de l'équation (S).

3° Enfin celle qui est tout entière à l'extérieur du cône $Q = 0$ et pour laquelle on a nécessairement $P > 0$ et $Q > 0$. Elle correspond aux hyperboloïdes à une nappe de l'équation (S).

Comme transition, si le point A est sur le paraboloïde $P = 0$, l'équation (S) représente un paraboloïde elliptique. S'il est sur le cône $Q = 0$, la même équation représente aussi un cône. Enfin, si le point A est sur la courbe de contact de $P = 0$ et de $Q = 0$, la surface (S) représente un cylindre elliptique. Si l'on avait $K^2 < 0$, c'est-à-dire $h > c$, le plan P ne couperait plus réellement l'ellipsoïde. On aurait toujours $Q < 0$, sauf pour $\alpha = 0$,

$\beta = 0$ et $\gamma = \frac{K^2}{h}$. Il n'y aurait donc plus d'ellipsoïdes imaginaires, ni de cônes imaginaires, à moins que l'on n'eût $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{K^2}{h}$, auquel cas les cônes se réduiraient à un point, le point A, intérieur à l'ellipsoïde et pôle du plan P. Il n'y aurait plus également de cônes réels proprement dits, ni d'hyperboloïdes à une nappe.

Nota. — La même question a été résolue par MM. E. Humbert, élève du lycée de Besançon; Duranton, chargé de cours au lycée du Puy; V. Hioux, professeur au lycée de Rennes; A. Tourrettes, censeur au lycée d'Albi; Escary, professeur au lycée de Châteauroux; Lévy, professeur au lycée de Rennes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1228

(voir 2e série, t. XVI, p. 192);

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

Sur une normale menée par un ombilic O *à une surface du second degré, il existe un point* P *tel, qu'en menant par ce point une transversale rectiligne, rencontrant la surface en des points* M, M', *l'angle* MOM' *est constamment droit, quelle que soit la direction donnée à la transversale. Et le plan polaire du point* P, *par rapport à la surface considérée, est parallèle à un plan cyclique de cette surface.*

La méthode que je vais suivre montre que les ombilics d'une surface du second ordre jouissent de la propriété énoncée, à l'exclusion de tous les autres points de la surface.

Soit une surface du second ordre; prenons pour origine un point de la surface, pour axe des z la normale en ce point, et pour axes des x et des y deux droites parallèles aux axes de la section faite dans la surface par un plan parallèle au plan tangent à l'origine.

L'équation de la surface est alors de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2lz = 0.$$

Faisons tourner les axes des x et des y d'un angle φ autour de l'axe des z. L'équation de la surface dans ce nouveau système d'axes sera

$$\begin{aligned}A(x\cos\varphi - y\sin\varphi)^2 + A'(x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 + A''z^2 \\ + 2B(x\sin\varphi + y\cos\varphi)z + 2B'(x\cos\varphi - y\sin\varphi)z + 2lz = 0.\end{aligned}$$

Si, dans cette équation, on fait $x = 0$, on obtient une équation qui représente la section faite dans la surface par le nouveau plan des yz. Cette équation est

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&(A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi)y^2 + A''z^2 \\ &\quad + 2(B\cos\varphi - B'\sin\varphi)yz + 2lz = 0.\end{aligned}\right.$$

Soit maintenant une droite située dans le plan des yz, et dont l'équation sera

$$my + nz = 1.$$

L'équation

$$\begin{aligned}&(A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi)y^2 \\ &\quad + A''z^2 + 2(B\cos\varphi - B'\sin\varphi)yz + 2lz(my + nz) = 0\end{aligned}$$

représentera, dans le plan des yz, les deux droites qui joignent l'origine aux points où cette droite coupe la conique représentée par l'équation (1).

Cette dernière équation peut s'écrire

$$\begin{aligned}&(A\sin^2\varphi + A'\cos^2\varphi)y^2 \\ &\quad + 2(B\cos\varphi - B'\sin\varphi + Cm)yz + (A'' + 2ln)z^2 = 0.\end{aligned}$$

Pour que ces deux droites soient rectangulaires, il faut et il suffit qu'on ait

$$A \sin^2\varphi + A' \cos^2\varphi + A'' + 2ln = 0,$$

d'où

$$n = -\frac{A \sin^2\varphi + A' \cos^2\varphi + A''}{2l}.$$

Portant cette valeur de n dans l'équation

$$my + nz = 1,$$

il vient

$$my - \frac{A \sin^2\varphi + A' \cos^2\varphi + A''}{2l} z = 1.$$

La droite représentée par cette équation coupe l'axe des z en un point dont la distance à l'origine est

$$z = -\frac{2l}{A \sin^2\varphi + A' \cos^2\varphi + A''}.$$

Pour que cette distance soit indépendante de φ, il faut et il suffit que $A = A'$, c'est-à-dire que l'origine soit un ombilic de la surface.

Si la condition $A = A'$ est satisfaite, les coordonnées du point P sont

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{2l}{A + A''}.$$

Le plan polaire de ce point a pour équation

$$-2(A''z + By + B'x + C) + (A + A'')z = 0.$$

Le plan mené par l'origine parallèlement à celui-ci a pour équation

$$(1) \qquad A''z + 2By + 2B'x = Az.$$

D'ailleurs l'équation de la surface peut s'écrire

$$A(x^2 + y^2) + z(A''z + 2By + 2B'x) + 2lz = 0;$$

par conséquent les coordonnées d'un point quelconque

de l'intersection de la surface avec le plan représenté par l'équation (1) satisfont à l'équation

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2lz = 0,$$

qui est celle d'une sphère, ce qui démontre la propriété énoncée.

Nota. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; E. Paturet; A. Morel; B. Launoy; A. Berthomieu, élève du lycée de Bordeaux; H. Picat, élève du lycée de Grenoble; Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; A. Genouille, professeur au lycée de Tournon.

Question 1231

(voir 2e série, t. XVI, p. 240);

PAR M. MORET-BLANC.

D'un point M *on mène trois normales à une conique; soit* P *le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois pieds de ces normales; démontrer que la droite* OP *et la quatrième normale que l'on peut mener du point* M *à la courbe sont également inclinées sur les axes.*

Si la conique est une hyperbole équilatère, la droite OP *passe par le pied de la quatrième normale.*

(LAGUERRE.)

Soient A, B, C les pieds des trois premières normales et D le pied de la quatrième. Je prends les axes de la conique pour axes des coordonnées, et je suppose, pour fixer les idées, que la conique est une ellipse : pour l'hyperbole, il suffira de changer dans le résultat b^2 en $-b^2$.

Soient x_1, y_1 les coordonnées du point M et

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation de la conique. Les pieds des quatre normales sont les intersections de cette conique avec l'hyperbole

$$(2)\qquad c^2xy - a^2x_1y + b^2y_1x = 0.$$

Le cercle circonscrit au triangle ABC a une équation de la forme

$$(3)\qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + S = 0,$$

en posant $\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = S$.

De l'équation (2) on tire

$$y = \frac{b^2y_1x}{a^2x_1 - c^2x}.$$

En reportant cette valeur dans les équations (1) et (3), on obtient les équations

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l|l} c^4x^4 - 2a^2c^2x_1x^3 + a^4x_1^2 & x^2 + 2a^4c^2x_1x - a^6x_1^2 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\quad + a^2b^2y_1^2 & \\ \qquad\qquad\qquad\quad - a^2c^4 & \end{array} \right.$$

$$(5)\quad \left\{ \begin{array}{l|l|l|l} c^4x^4 - 2a^2c^2x_1 & x^3 + 4a^2c^2x_1\alpha & x^2 - 2a^4x_1^2\alpha & x + a^4x_1^2S = 0, \\ \quad - 2c^4\alpha & \quad + 2b^2c^2y_1\beta & \quad - 2a^2b^2x_1y_1\beta & \\ & \quad + c^4S & \quad - 2a^2c^2x_1S & \\ & \quad + a^4x_1^2 & & \\ & \quad + b^4y_1^2 & & \end{array} \right.$$

qui déterminent, la première les abscisses des points A, B, C, D, et la seconde celles des points A, B, C, P′ [P′ étant le point de l'hyperbole (2) diamétralement opposé au point P].

Ces deux équations ayant trois racines communes, leurs premiers membres admettent un diviseur commun du troisième degré

$$(d)\quad \left\{ \begin{array}{l|l|l} 2c^4\alpha x^3 - 4a^2c^2x_1\alpha & x^2 + 2a^4x_1^2\alpha & x - a^4x_1^2T, \\ \qquad\qquad + 2b^2c^2y_1\beta & \quad + 2a^2b^2x_1y_1\beta & \\ \qquad\qquad + c^4T & \quad + 2a^2c^2x_1T & \\ \qquad\qquad + b^2c^2y_1^2 & & \end{array} \right.$$

où $T = S + a^2$, que l'on obtient en les retranchant l'un de l'autre.

En exprimant que le reste de la division est nul, quel que soit x, on a les trois équations

$$(6)\quad 4a^2b^2y_1\alpha(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1) - 4a^2c^4\alpha^2 + V^2 = 0,$$

$$(7)\quad \begin{cases} 4a^2c^4\alpha^2 - 2a^2b^2x_1y_1\alpha\beta \\ \quad + a^2b^2x_1y_1^2\alpha - b^2y_1\beta V - c^2TV = 0, \end{cases}$$

$$(8)\quad 4a^2c^4\alpha^2 - c^2TV = 0,$$

en posant, pour abréger, $c^2T + 2b^2y_1\beta - b^2y_1^2 = V$.

En ayant égard à l'équation (8), l'équation (7) se réduit à

$$a^2x_1\alpha(y_1 - 2\beta) - \beta V = 0,$$

d'où

$$V = \frac{a^2x_1\alpha(y_1 - 2\beta)}{\beta} \quad \text{et} \quad T = \frac{(a^2x_1\alpha + b^2y_1\beta)(y_1 - 2\beta)}{c^2\beta},$$

$$TV = \frac{a^2x_1\alpha(a^2x_1\alpha + b^2y_1\beta)(y_1 - 2\beta)^2}{c^2\beta^2} = 4a^2c^2\alpha^2,$$

et, par suite,

$$(9)\quad 4c^4\alpha\beta^2 = x_1(a^2x_1\alpha + b^2y_1\beta)(y_1 - 2\beta)^2.$$

En remplaçant V par sa valeur dans l'équation (6), on a

$$4a^2b^2y_1\alpha(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1) - 4a^2c^4\alpha^2 + \frac{a^4x_1^2\alpha^2(y_1 - 2\beta)^2}{\beta^2} = 0,$$

et, en ayant égard à l'équation (9),

$$4b^2y_1(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1)\beta^2 - b^2x_1y_1\beta(y_1 - 2\beta)^2 = 0,$$

$$4(y_1\alpha + x_1\beta - x_1y_1)\beta - x_1(y_1^2 - 4y_1\beta + 4\beta^2) = 0,$$

$$(10)\quad 4\alpha\beta - x_1y_1 = 0.$$

On voit que les centres des quatre cercles circonscrits au triangle ayant pour sommets les pieds des normales

pris trois à trois, sont situés sur une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes de la conique et passant par le milieu de OM.

Au moyen de l'équation (10), l'équation (9) peut être remplacée par

$$(9') \quad 4a^2\alpha(\alpha - x_1) + 4b^2(\beta - y_1) + a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4 = 0,$$

qui représente une conique de même espèce que la proposée, passant par les centres des quatre cercles.

En égalant à zéro le quotient de la division du polynôme (4) par le diviseur (d), on a l'abscisse du point D,

$$x = \frac{-V}{2c^2\alpha} = -\frac{a^2x_1(2\beta - y_1)}{2c^2\beta},$$

puis

$$y = \frac{b^2y_1x}{a^2x_1 - c^2x} = \frac{b^2(2\beta - y_1)}{c^2},$$

et, par suite,

$$y - y_1 = \frac{2b^2\beta - a^2y_1}{c^2}, \quad x - x_1 = \frac{x_1(2b^2\beta - a^2y_1)}{2c^2\beta},$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{2\beta}{x_1},$$

coefficient angulaire de la quatrième normale MD.

De même, en égalant à zéro le quotient de la division du polynôme (5) par le diviseur (d), on a l'abscisse du point P' symétrique du point P par rapport au centre de l'hyperbole (2)

$$x' = 2\alpha - \frac{V}{2c^2\alpha} = 2\alpha + \frac{a^2x_1(2\beta - y_1)}{2c^2\beta}$$

$$= \frac{4c^2\alpha\beta + 2a^2x_1\beta - a^2x_1y_1}{2c^2\beta},$$

et, en vertu de l'équation (10),

$$x' = \frac{x_1(2a^2\beta - b^2y_1)}{2c^2\beta}$$

$$y' = \frac{b^2y_1x}{a^2x_1 - c^2x} = \frac{2a^2\beta - b^2y_1}{c^2},$$

$$\frac{y'}{x'} = \frac{2\beta}{x_1},$$

coefficient angulaire de OP'.

La droite OP' est donc parallèle à MD.

Les coordonnées du centre de l'hyperbole (2) étant $\frac{a^2x_1}{c^2}$ et $-\frac{b^2y_1}{c^2}$, celles du point P symétrique de P' par rapport à ce centre sont

$$x = \frac{2a^2x_1}{c^2} - \frac{x_1(2a^2\beta - b^2y_1)}{2c^2\beta} = \frac{x_1(2a^2\beta + b^2y_1)}{2c^2\beta},$$

$$y = -\frac{2b^2y_1}{c^2} - \frac{2a^2\beta - b^2y_1}{c^2} = -\frac{(2a^2\beta + b^2y_1)}{c^2}.$$

Le coefficient angulaire de OP est donc

$$\frac{y}{x} = \frac{2\beta}{x_1},$$

ce qui démontre le théorème.

Si la conique donnée est une hyperbole équilatère, $b^2 = a^2$, les coordonnées du point D

$$x = \frac{x_1(2\beta - y_1)}{4\beta}, \quad y = -\frac{2\beta - y_1}{2}$$

vérifient l'équation

$$\frac{y}{x} = \frac{-2\beta}{x_1}$$

de la droite OP.

Donc la droite OP passe par le pied de la quatrième normale. C. Q. F. D.

Question 1245

(voir 2e série, t. XVI, p. 335);

Par M. BARTHE,
Élève du lycée de Bordeaux.

Toute corde menée par le foyer d'une parabole est égale au quadruple du rayon vecteur du point de contact de la tangente parallèle à cette corde.

(P. Sondat.)

Soient P le pôle de la corde focale AB, qui se trouve sur la directrice, I le milieu de cette corde, M le point de contact de la tangente parallèle à la corde; on a, d'après une propriété connue,

$$PM = MI,$$

puis

$$PM = MF,$$

d'où

$$PI = 2MF.$$

Mais le triangle rectangle PAB donne

$$PI = \frac{AB}{2};$$

donc

$$AB = 4MF.$$

Nota. — Autres solutions de MM. Moret-Blanc; H. Lez; C. Cochery; B. Robaglia; F. Pisani, professeur à Naples; Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; A. Droz, ingénieur; G. Carraud, élève du lycée de Châteauroux; R. Beaugey, élève du lycée de Grenoble; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; G. Lambiotte, élève de l'École des Mines de Liége; Numa Parra, J. Lapierre, L. Troupenat, J. Chambon, élèves du lycée de Bordeaux; A. Genouille, professeur au lycée de Tournon; Ad. Protard, élève du lycée de Moulins; E. Dunoyer, élève du lycée de Marseille; A. Didier, élève du lycée de Grenoble; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; E. Ambert, maître répétiteur au lycée de Montpellier; S. K., à Vienne (Autriche).

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tome IX (1876).

Janvier. — Intorno alla vita ed ai lavori di *Francesco Maurolico*. — Federico Napoli.

Scritti inediti di *Francesco Maurolico*.

Février. — Scritti inediti di *Francesco Maurolico* (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Mars. — Sur un thérorème de l'Arithmétique indienne; par M. *Edouard Lucas*.

Die || Römischen Agrimensoren || und ihre Stellung || in der || Geschichte der feldmesskunst || eine || historisch-mathematische Untersuchung || von || Dr Moritz Cantor || mit 5 lithographirten Tafeln || Leipzig || Druck und Verlag von B. G. Teubner || 1875. — *A. Favaro*.

Die Rechenkunst || in || sechzehnten Jahrhundert || von || A. Kuckuck || separatabdruck || aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums || zum grauen Kloster || Berlin || Weidmannsche Buchhandlung || 1874. — Dr *Maurizio Cantor*.

Avril. — Intorno al problema delle tautocrone, lettera del Prof. *F. Brioschi* a *D.-B. Boncompagni*.

Note sur *Jean-André de Segner*, fondateur de la Météorologie mathématique; par le Dr Sigismond Günther.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Mai. — Prospetto storico dello sviluppo della Geometria moderna. Scritto postumo del Dr Ermanno Hankel. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Commemorazione di Ermanno Hankel; per *Guglielmo von Zahn.* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Catalogo dei lavori del Dr Ermanno *Hankel.*

Juin. — Notice sur la vie et les travaux de *Louis-Othon Hesse;* par M. Félix Klein; traduit de l'allemand par M. *Paul Mansion.*

Copernico in Italia. — Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Copernico in Bologna. — Dr *F. Hipler.* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Juillet. — Intorno alla vita ed agli scritti di *Gianfrancesco Malfatti,* matematico del secolo xviii. — *G.-B. Biadego.*

Catalogo dei lavori di *Gianfrancesco Malfatti.* — Catalogo dei lavori relativi al problema *Malfatti.* — Lettere inedite di *Gianfrancesco Malfatti.*

Aout. — Lettere inedite di *Gianfrancesco Malfatti* (fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Septembre. — *Goffredo Friedlein.* Necrologia del Dr Maurizio Cantor. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Catalogo dei lavori del Dr *Goffredo Friedlein.* — B. Boncompagni.

Notice sur la vie et les travaux de *Victor-Amédée Le Besgue;* par MM. *Abria* et *J. Hoüel.*

Catalogue des travaux de *V.-A. Le Besgue.* — Notice sur les principaux travaux de *V.-A. Le Besgue,* rédigée par lui-même.

Notice sur les opuscules de *Léonard de Pise;* par V.-A. Le Besgue.

Octobre. — Prophatii Judæi Montepessulani (*a.* 1300) procemium in Almanach adhuc ineditum e versionibus duabus antiquis (altera quoque interpolata), una cum textu hebraico e manuscriptis primum edidit, suamque versionem latinam verbalem adjecit *Mauritius Steinschneider.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Novembre. — Lettre à D.-B. Boncompagni, sur la vie et les travaux de M. *Louis-Amélie Sédillot*; par M. le Dr *C.-E. Sédillot.*

Catalogo dei lavori di *Luigi-Amelio Sédillot.* — *B. Boncompagni.*

Décembre. — Sulla nazionalità del *Copernico*; per *Maurizio Cantor.* (Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*)

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Indici degli articoli e dei nomi.

Tirages a part.

Scritti inediti di *Francesco Maurolico*, pubblicati dal Prof. *Federico Napoli* (gennaio a febbraio 1876).

Commemorazione di *Ermanno Hankel.* per *Guglielmo von Zahn*, traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna* (maggio 1876).

Prospetto storico dello sviluppo della Geometria moderna, scritto postumo del Dr *Ermanno Hankel.* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna* (maggio 1876).

Notice sur la vie et les travaux de *Louis-Othon Hesse*; par *Félix Klein*, Professeur à l'École Polytechnique de Munich, traduite de l'allemand par M. *Paul Mansion*, Professeur à l'Université de Gand (giugno 1876).

Goffredo Friedlein. Necrologia del Dr *Maurizio Cantor*, traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna*, seguita da un catalogo dei lavori del medesimo *G. Friedlein*; compilato da *B. Boncompagni* (settembre 1876).

Notice sur la vie et les travaux de *Victor-Amédée Le Besgue*, Correspondant de l'Institut, Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux; par M. *O. Abria*, Doyen de la Faculté des Sciences de Bordeaux, et *J. Hoüel*, Professeur à la même Faculté, suivie de deux travaux inédits de *V.-A. Le Besgue* (settembre 1876).

Catalogo dei lavori di *Luigi-Amelio Sedillot*; compilato da *B. Boncompagni* (novembre 1876).

La vie et les travaux de *Jean Hévélius*; par *L.-C. Béziat* (settembre, ottobre, novembre et decembre 1876).

Intorno alla somma delle quarte potenze dei numeri naturali. — Nota di *B. Boncompagni* (tomo X, maggio 1877).

Gemscid, astronome et géomètre arabe, mort avant 1450, a, dans un passage de sa *Clef du calcul*, traduit par Wœpcke, donné et appliqué au cas de $n = 10$ la formule

$$\begin{aligned} &1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 \\ &= \left[(1+2+3+\ldots+n) + \frac{1}{5}(1+2+3+\ldots+(n-1)+n-1)\right] \\ &\quad \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2), \end{aligned}$$

pour la somme des quatrièmes puissances des nombres naturels. *Fermat*, dans une Lettre du 4 novembre 1636, a donné la formule

$$\begin{aligned} &5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) \\ &\quad = (4n+2)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2). \end{aligned}$$

Le P. *J. Prestet* a donné, en 1615, la formule générale

$$S_m = \frac{\left[\begin{aligned} &(a+nb)^{m+1} - a^{m+1} - nb^{m+1} - \frac{(m+1)m}{1.2} b^2 S_{m-1} \\ &- \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} b^3 S_{m-2} - \ldots - (m+1) b^m S_1 \end{aligned}\right]}{(m+1)b},$$

qui se réduit facilement à la suivante :

$$\begin{aligned} S_m = &\frac{(a+nr)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{2} r S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2.3} r^2 S_{m-2} \\ &- \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4} r^3 S_{m-3} - \ldots - \frac{nr^m}{m+1}, \end{aligned}$$

démontrée dans plusieurs Traités d'Algèbre élémentaire.

Intorno alla parola : « *Cumulo* » usata da *Francesco dal Sole*; in senso di « mille milioni ». — *B. Boncompagni* (août 1877).

François del Sole, arithméticien de Château-Thierry, a, dans

un Traité d'Arithmétique, imprimé à Ferrare en 1546, employé le mot *Cumulo*, dans le sens de *mille millions*. — *Étienne de la Roche*, dans son Traité d'Arithmétique, imprimé en 1520, a donné au mot *Billion* le sens de *million de millions*. — *Jacques Peletier*, dans un Traité d'Arithmétique, imprimé pour la première fois en 1549, emploie, dans le même sens, le mot *milliard*.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Cours de Mathématiques élémentaires. — Appendice aux Exercices de Géométrie; par F. I. C. (1877).

2. Exercices de Géométrie descriptive; par F. I. C. (1877).

3. *Sopra alcune questioni dinamiche.* Memoria che fa seguito a quella intorno ai principii fondamentali della Dinamica, del Prof. *Dominico Chelini*. S. P. — Bologna. Tipi Gamberini e Parmeggiani, 1877.

4. Le Funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni e di curvatura costante; di *Enrico d'Ovidio*. — Roma, coi tipi del Salviucci, 1877.

5. L'Astronomie pratique et les Observatoires en Europe et en Amérique; 3e Partie : États-Unis d'Amérique; par C. André et A. Angot. In-18 jésus. — Paris, Gauthier-Villars, 1877.

ERRATA DES TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 252, ligne 5, colonne des cotang : *au lieu de* 0,6515868, *lisez* 0,8515868.

Cette faute a été signalée par M. Laming, employé du Bureau des Longitudes.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

[SUITE (*).]

II.

Examen du cas où toutes les racines de l'équation sont réelles.

5. Considérons une équation du degré n, $F(z) = 0$, ayant toutes ses racines réelles.

Soit la courbe dont l'équation est $u = F(z)$, prenons un point quelconque M sur cette courbe et par ce point menons une parallèle à l'axe des u et la tangente à la courbe. Soient respectivement P et T les points où ces droites coupent l'axe des z; portons sur cet axe, à partir du point P et dans la direction PT, une longueur PT' égale à $n \times$ PT.

Du théorème I et de l'interprétation géométrique de la méthode de Newton, on déduit immédiatement la proposition suivante :

La courbe dont l'équation est $u = F(z)$ rencontre au moins une fois l'axe des z entre les points T *et* T'.

6. Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'une propriété beaucoup plus générale.

Convenons, comme précédemment, de représenter une

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVII, p. 20.

quantité imaginaire quelconque $\alpha + \beta i$ par un point d'un plan ayant respectivement α et β pour abscisse et pour ordonnée relativement à deux axes rectangulaires arbitrairement choisis.

L'équation $F(z) = 0$ ayant toutes ses racines réelles, ces diverses racines seront représentées par divers points de l'axe des abscisses.

Cela posé, j'énoncerai d'abord la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation $F(z) = 0$ *ait toutes ses racines réelles est que chaque point du plan et son point dérivé soient situés de part et d'autre de l'axe des abscisses.*

En effet, si un point m et son point dérivé μ se trouvaient d'un même côté relativement à l'axe des abscisses, on pourrait, par les deux points m et μ, faire passer un cercle situé entièrement d'un même côté par rapport à cet axe. L'équation, en vertu du théorème I, aurait donc au moins une racine imaginaire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Réciproquement, si l'équation a des racines imaginaires, on peut trouver une infinité de points dont les points dérivés sont situés du même côté relativement à l'axe des abscisses.

Il suffit pour le démontrer de remarquer que, quand un point m du plan tend vers une racine ζ de l'équation, le point dérivé μ tend vers la même racine ; en prenant m suffisamment rapproché de ζ, on pourra évidemment faire en sorte que le point dérivé soit situé du même côté relativement à l'axe des abscisses.

La proposition précédente est donc entièrement établie.

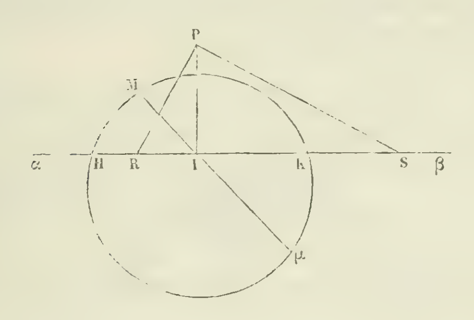
7. La droite $\alpha\beta$ désignant l'axe des abscisses (*fig.* 1), soit M un point quelconque du plan et μ son point dérivé. Comme je viens de le faire remarquer, les deux points M

et μ sont situés de part et d'autre de l'axe des abscisses ; menons par ces points un cercle quelconque, et soient H et K les points où ce cercle coupe l'axe $\alpha\beta$.

En vertu du théorème I, le cercle renferme au moins une racine, et comme, par hypothèse, toutes les racines de l'équation sont réelles, cette racine est comprise entre les points H et K.

Les points M et μ restant fixes, on peut faire varier le cercle, et l'on obtiendra ainsi une infinité de seg-

Fig. 1.



ments analogues à HK et tels que chacun d'eux renfermera au moins une racine. Soit I le point de rencontre de M μ avec l'axe ; au point I, élevons une perpendiculaire de longueur IM, telle que $\overline{IP}^2 = \overline{MI} \times \mu I$.

Les divers segments dont je viens de parler sont vus du point P sous un angle droit.

A chaque point M du plan correspond donc un point P, défini comme je viens de le dire, et jouissant de la propriété énoncée dans la proposition suivante :

Si, par le point P, *on mène deux droites rectangulaires quelconques interceptant sur l'axe un segment* RS, *ce segment renferme au moins une racine de l'équation et en renferme au plus* $(n-1)$.

En considérant diverses positions du point M, on obtiendra autant de positions du point correspondant P. Il est facile de se rendre compte comment ces points P sont distribués dans le plan.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation soit du troisième degré et désignons par a, b, c (*fig.* 2) les points qui, sur l'axe $\alpha\alpha'$, représentent les racines de l'équation.

Sur chacun des trois segments ab, bc et ca comme diamètres décrivons une demi-circonférence : nous obtiendrons ainsi trois arcs de cercle formant une sorte de triangle curviligne $ac'ba'cb'a$.

Fig. 2.

En examinant la figure, on verra facilement que deux droites rectangulaires quelconques passant par un point situé dans l'intérieur de ce triangle interceptent sur l'axe un segment renfermant au moins une racine de l'équation et en renfermant au plus deux. Au contraire, si l'on prend arbitrairement un point en dehors de ce triangle, on peut toujours par ce point mener deux droites rectangulaires interceptant sur l'axe un segment ne comprenant aucune racine de l'équation ou les comprenant toutes.

Tous les divers points P couvrent donc une portion du plan comprise tout entière dans le triangle curviligne $ac'ba'cb'a$, et il est facile de voir que la courbe qui

la limite est tangente aux cercles aux points a, b, c et a un rebroussement en chacun de ces points.

Dans la *fig.* 2, cette portion du plan a été couverte de hachures. (*A suivre.*)

SUR LE BINOME DE NEWTON;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Poitiers.

L'objet de cette Note est une démonstration de la formule du binôme, dans le cas d'un exposant entier. Cette démonstration est directe (*), elle repose simplement sur l'identité (**)

$$\left.\begin{array}{l} 1.2\ldots(y+1) \\ +\,2.3\ldots(y+2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\,(z-y)(z-y+1)\ldots z \end{array}\right\} = \frac{(z+1)z\ldots(z-y)}{y+2},$$

identité facile à vérifier (***)

En développant les premières puissances de $(x+a)$,

(*) *Voyez* sur ce sujet : E. CATALAN, *Nouvelles Annales*, p. 59, 1874, et LAURENT, *Algèbre*, 2e édition.

(**) Cette identité est un cas particulier de l'identité

$$\left.\begin{array}{l} x(x+1)(x+2)\ \ldots\ (x+y) \\ (x+1)(x+2)\ \ldots\ (x+y+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (z-y)(z-y+1)\ \ldots\ (z-1)z \end{array}\right\} = \frac{(z+1)z\ldots(z-y)-(x+y)\ldots x(x-1)}{y+2},$$

proposée par M. Haton. Voyez *Nouvelles Annales*, p. 476; 1872.

(***) Elle est, en effet, évidente pour $z-y=1$, et l'on voit immédiatement que, si elle est vraie pour une certaine valeur de $z-y$, elle est encore vraie pour la valeur de $z-y$ supérieure d'une unité.

on aperçoit une loi, loi facile à généraliser et en vertu de laquelle on peut poser

$$(x+a)^m = x^m + A_{m,1}\, a x^{m-1} + A_{m,2}\, a^2 x^{m-2} + \ldots + A_{m,k}\, a^k x^{m-k} + \ldots + a^m.$$

Il s'agit donc de déterminer les coefficients $A_{m,1}$, $A_{m,2}$, ...

1. Multiplions les deux membres de l'égalité précédente par $x+a$, nous aurons

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + \left.\begin{matrix} A_{m,1} \\ +1 \end{matrix}\right| a x^m + \left.\begin{matrix} A_{m,2} \\ +A_{m,1} \end{matrix}\right| a^2 x^{m-2} + \ldots + \left.\begin{matrix} A_{m,k} \\ +A_{m,k-1} \end{matrix}\right| x^{m-k+1} + \ldots + a^{m+1}.$$

D'autre part, et d'après la notation que nous adoptons, on peut écrire

$$(x+a)^{m+1} = x^{m+1} + A_{m+1,1}\, a x^m + A_{m+1,2}\, a^2 x^{m-1} + \ldots + A_{m+1,k}\, a^k x^{m-k+1} + \ldots + a^{m+1}.$$

Identifions ces deux résultats; on aura d'abord

$$A_{m+1,1} = 1 + A_{m,1},$$

et par suite

$$A_{m,1} = 1 + A_{m-1,1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{2,1} = 1 + A_{1,1}.$$

Ajoutons et remarquons que $A_{1,1} = 1$, on obtient

$$(1) \qquad A_{m+1,1} = \frac{m+1}{1}.$$

Cherchons $A_{m+1,2}$. On a

$$A_{m+1,2} = A_{m,2} + A_{m,1},$$

ou, puisque $A_{m,1} = m$, d'après l'égalité (1),

$$A_{m+1,2} = A_{m,2} + m,$$

par suite

$$A_{m,2} = A_{m-1,2} + (m-1),$$
$$\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{3,2} = A_{2,2} + 2.$$

Ajoutons et remarquons que $A_{2,2} = 1$, on trouve

(2) $$A_{m+1,2} = \frac{m(m+1)}{1.2}.$$

2. Les égalités (1) et (2) font pressentir la loi à laquelle obéissent les coefficients du développement de $(x+a)^m$. Nous admettrons donc que

$$A_{m,k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k},$$

quelle que soit la valeur donnée à k, pourvu qu'elle soit entière et au plus égale à m, et nous allons démontrer que

(3) $$A_{m+1,k} = \frac{(m+1)m\ldots(m-k+2)}{1.2\ldots k}.$$

Égalons en effet les deux coefficients de $a^k x^{m-k+1}$ dans les deux développements de $(x+a)^{m+1}$, et nous aurons

$$A_{m+1,k} = A_{m,k} + A_{m,k-1},$$

par suite

$$A_{m,k} = A_{m-1,k} + A_{m-1,k-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{k+1,k} = A_{k,k} + A_{k,k-1}.$$

Ajoutons; remarquons que $A_{k,k} = 1$ d'après l'identité (3), et remplaçons aussi

$$A_{k,k-1}, \quad \ldots, \quad A_{m-1,k-1}, \quad A_{m,k-1}$$

par leurs valeurs respectives tirées de cette identité transformée par le changement de k en $(k-1)$, nous obtenons

$$A_{m+1,k} = 1 + \frac{2.3\ldots k + 3.4\ldots(k+1) + \ldots + (m-k+2)\ldots m}{1.2\ldots(k-1)};$$

ou enfin, et en nous servant de l'identité citée au début de cette Note,

$$A_{m+1,k} = \frac{(m+1)m\ldots(m-k+2)}{1.2\ldots(k-1)k}.$$

La loi des coefficients est donc généralisée, et la formule du binôme établie.

REMARQUES SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

Par UN ABONNÉ.

1. Étant donné un polynôme $f(x)$, du degré n, on sait le rôle important que joue sa dérivée $f'(x)$ dans la résolution de l'équation $f(x) = 0$.

Dans la plupart des cas, on peut remplacer cette dérivée par le polynôme

$$\varphi(x) = (\lambda - x)f'(x) + nf(x),$$

qui renferme une constante arbitraire λ et qui, quel que soit λ, est généralement, ainsi que la dérivée, du degré $(n-1)$.

2. Supposons, par exemple, qu'en effectuant sur $f(x)$ et $\varphi(x)$ l'opération du plus grand commun diviseur, en changeant de signe tous les restes, nous formions une suite de polynômes, f, φ, φ_1, φ_2, ..., analogues à ceux que l'on forme, dans la méthode de Sturm, en prenant pour point de départ les polynômes f et f'.

Sans entrer dans les détails de la démonstration, on voit clairement que, si l'on fait varier x, la suite des

termes $f, \varphi, \varphi_1, \ldots$ ne peut perdre de variations que quand $f(x)$ s'annule. Dans ce cas, l'expression

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = n + (\lambda - x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

passe évidemment du positif au négatif, si $x > \lambda$, et du négatif au positif, si $x < \lambda$.

D'où la proposition suivante, due à M. Hermite (*) :

Si, dans la suite des polynômes $f, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$, on substitue deux nombres α et β $(\alpha < \beta)$, l'excès du nombre des variations de cette suite pour $x = \alpha$, sur le nombre des variations de cette suite pour $x = \beta$, est égal à l'excès du nombre des racines de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre α et β et plus petites que λ, sur le nombre de ces racines qui sont plus grandes que λ.

Il est clair que la proposition précédente peut servir aux mêmes usages que le théorème de Sturm, en ayant soin, lorsque l'on veut déterminer le nombre des racines réelles comprises entre α et β, de substituer le nombre λ dans la suite, si λ est compris entre α et β.

Je remarquerai maintenant que l'on peut toujours déterminer λ, de telle sorte que le polynôme $\varphi(x)$ s'abaisse au degré $(n - 2)$. On aura, par suite, une division de moins à faire que dans l'application de la méthode de Sturm ; ce qui, dans certains cas, pourra être plus avantageux.

3. Je prendrai, comme second exemple, la séparation des racines d'une équation du cinquième degré.

M. Maleyx, qui a, dans ce Journal, publié plusieurs Notes intéressantes sur la séparation des racines (**), a

(*) *Mémoire sur l'équation du cinquième degré*, p. 31.

(**) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XI, p. 404, et t. XIII, p. 385.

remarqué que les racines de l'équation du cinquième degré pouvaient être séparées en résolvant deux équations du deuxième degré.

Le procédé suivant sera peut être plus commode dans la pratique.

En désignant par $f(x)$ un polynôme du cinquième degré, déterminons λ de telle sorte que le polynôme

$$\varphi(x) = (\lambda - x) f'(x) + 5 f(x)$$

s'abaisse au troisième degré ; puis effectuons la division de f par φ. Nous obtiendrons l'équation

$$f = \varphi Q + R,$$

où Q et R sont des polynômes du second degré.

En remplaçant φ par sa valeur, la relation précédente peut s'écrire

$$f(1 - 5Q) = (\lambda - x) Q f'(x) + R ;$$

on en conclut que les racines de $f(x) = 0$ sont séparées par les racines des équations

$$x - \lambda = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0,$$

dont une est du premier degré et deux du second seulement.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877.

Mathématiques spéciales.

Rechercher les surfaces S du second degré, sur lesquelles existe une droite D, telle que l'hyperboloïde de révolution H, qui a pour axe une génératrice rectiligne

quelconque, G, de la surface S, et du même système que D, et qui passe par la droite D, coupe orthogonalement la surface S en tous les points de cette droite.

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H qui se rapportent à une même surface S, jouissant de la propriété énoncée :

1° Trouver le lieu des sommets A et celui des foyers F des hyperboloïdes H′ conjugués des hyperboloïdes H;

2° Par l'un des foyers F de l'hyperboloïde H′, on mène un plan P parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites G et D, et faisant, avec cette dernière, un angle supplémentaire de celui que fait, avec cette même droite, l'axe G de l'hyperboloïde H; trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan P coupe la droite D à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface S et de l'hyperboloïde H.

Mathématiques élémentaires.

Étant donnés deux plans P et P′ et un point A en dehors de ces deux plans, on considère toutes les sphères qui passent par le point A, et qui sont tangentes aux deux plans donnés :

1° Trouver le lieu de la droite qui joint le point A au centre de la sphère variable;

2° Trouver le lieu du point où cette sphère touche l'un des plans.

Philosophie.

Étant donnée une sphère de rayon R, trouver :

1° Le lieu du sommet d'un angle trièdre dont les trois arêtes sont tangentes à cette sphère, et dont les trois faces sont égales chacune à 60 degrés;

2° Le lieu du sommet d'un angle trièdre dont les plans

des trois faces sont tangents à la même sphère, et dont les trois angles dièdres sont égaux chacun à 120 degrés.

Rhétorique.

I. Par un point A, pris au dehors d'une circonférence donnée O, on mène à cette circonférence une tangente AB, terminée au point de contact B, et l'on demande quelle doit être la distance AO pour que, en faisant tourner la figure autour de cette droite, l'aire de la surface engendrée par AB soit la moitié de la surface engendrée par la circonférence O.

II. Cartes géographiques.

Seconde.

I. Un train *omnibus* va du point A au point C, en passant par le point B, où il s'arrête cinq minutes; quatorze minutes après avoir quitté B, il rencontre un train *express* qui marche en sens contraire, et dont la vitesse est double de la sienne. Cet *express* est parti du point C au moment où le train *omnibus* était à 25 kilomètres du point A. On sait, en outre, que le train *express* met deux heures pour franchir la distance CB, et que si, une fois arrivé en A, il repartait immédiatement de ce point, il arriverait en C trois quarts d'heure après le train *omnibus*.

On demande combien chaque train fait de kilomètres à l'heure, et quelles distances séparent A, B, C.

II. La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage ce triangle en deux triangles partiels : démontrer que le carré du rayon du cercle inscrit dans le triangle total est égal à la somme des carrés des rayons des cercles inscrits dans les triangles partiels.

Troisième.

I. Un négociant a acheté, en Bourgogne, 24 pièces de vin à 80 francs la pièce de 228 litres, et, dans le Midi, 3 muids de vin à 110 francs le muid de 700 litres. Il a payé, en outre, 820 francs pour le transport et l'emmagasinage, plus 61 fr. 60 c. par hectolitre pour les droits d'entrée et d'octroi. En mélangeant ces deux quantités de vin, et en ajoutant une certaine quantité d'eau, il a obtenu un mélange dont il a rempli 36 fûts de 228 litres. A quel prix doit-il vendre chacun de ces fûts pour gagner 1200 francs sur l'opération?

II. Soit ABC un triangle dans lequel l'angle A est droit, et l'angle B double de l'angle C. On construit en dehors du triangle ABC : 1° sur l'hypoténuse BC, le carré BCDE; 2° sur le côté AB, le triangle équilatéral ABF; 3° sur le côté AC, le triangle équilatéral ACG. On joint le point F au point G, et au point E l'extrémité du côté BE du carré BCDE.

On suppose l'hypoténuse BC égale à a, et l'on demande de calculer :

1° Les côtés AB, AC du triangle ABC;

2° Les distances du point F à la droite BE, et la distance du point G à la droite AF;

3° La surface du quadrilatère EFGD.

On appliquera les formules trouvées en supposant l'hypoténuse a égale à 5 mètres.

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

Mathématiques appliquées et Géométrie descriptive.

I. Sur deux plans inclinés P, Q, faisant avec le plan horizontal, le premier un angle de 60 degrés, le second

un angle de 30 degrés, et dans un plan perpendiculaire à l'intersection des plans P et Q, on place deux petits poids égaux réunis par un fil qui s'enroule sur une petite poulie dont l'axe coïncide avec l'intersection des plans P et Q, et dont les dimensions sont telles que les deux portions du fil sont respectivement parallèles aux deux plans inclinés.

On demande :

1° Dans quel sens se produit le mouvement;

2° Quels sont les espaces parcourus par les poids, après trois secondes;

3° Quelles sont les vitesses acquises par ces mêmes poids, après trois secondes.

II. On donne, dans le plan vertical de projection, un hexagone régulier, dont un côté, égal à 4 centimètres, coïncide avec la ligne de terre; cet hexagone est l'une des bases d'un prisme oblique, dont les arêtes sont horizontales et forment un angle de 60 degrés avec la ligne de terre; la seconde base du prisme est dans un plan parallèle au plan vertical de projection situé à 12 centimètres en avant de ce plan. Sur la face supérieure du prisme repose une sphère qui a 4 centimètres de rayon, et qui touche le plan de la face supérieure du prisme au centre du parallélogramme formé par cette face.

On demande de représenter le système de ces deux corps solides, et de dessiner leurs ombres propres, l'ombre portée par la sphère sur le prisme, et les ombres portées par les deux corps sur les plans de projection.

On supposera le système éclairé par la lumière dite à 45 degrés.

QUESTION DE LICENCE (1866);

PAR M. J. GRIESS,
à Zurich.

Trouver une courbe plane telle que la projection de son rayon de courbure sur une droite fixe située dans son plan ait une longueur constante.

La longueur du rayon de courbure est

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Le cosinus de l'angle du rayon de courbure avec la droite est égal au sinus de l'angle de la tangente avec la même droite. Si elle est prise comme axe des x, et que ω désigne ce dernier angle, on a

$$\tang\omega = \frac{dy}{dx};$$

donc

$$\sin\omega = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}},$$

donc la projection du rayon de courbure sera

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

donc l'équation différentielle de la courbe sera

$$\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}=a,\quad a\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$$

Pour intégrer cette équation, je pose

$$\frac{dy}{dx}=p,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx};$$

donc on a

$$a\frac{dp}{dx}=p(1+p^2).$$

Posons

$$p=\operatorname{tang}\omega,$$

on a

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{d\omega}{dx},$$

et il vient

$$a\frac{1}{\cos^2\omega}\frac{d\omega}{dx}=\operatorname{tang}\omega\frac{1}{\cos^2\omega},$$

$$a\frac{d\omega}{\operatorname{tang}\omega}=dx=a\frac{\cos\omega\,d\omega}{\sin\omega}=a\frac{d\sin\omega}{\sin\omega},$$

donc

$$\frac{x}{a}=l\sin\omega,\quad \sin\omega=e^{\frac{x}{a}};$$

on a maintenant

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang}\omega,\ dy=\operatorname{tang}\omega\,dx,$$

$$dy=\operatorname{tang}\omega\frac{a\,d\omega}{\operatorname{tang}\omega}=a\,d\omega,\quad y=a\omega.$$

Éliminant ω, on a

$$\frac{y}{a}=\operatorname{arc}\sin\left(e^{\frac{x}{a}}\right).$$

Cette équation représente une série de courbes, tan-

gentes à l'axe des y en des points dont les ordonnées sont

$$a\frac{\pi}{2},\quad a\frac{5\pi}{2},\quad a\frac{9\pi}{2},\quad \ldots;$$

ces différentes courbes sont comprises entre des droites

$$x=0 \quad\text{et}\quad x=a\pi,\quad x=2a\pi \quad\text{et}\quad x=3a\pi,$$
$$x=2na\pi \quad\text{et}\quad x=(2n+1)a\pi,$$

et elles ont en même temps ces différentes droites pour asymptotes. Elles sont toutes étendues vers le côté des x négatifs.

QUESTION DE LICENCE (NOVEMBRE 1875);

Par M. H. COURBE,
Professeur au lycée de Fribourg (Suisse).

Déterminer toutes les surfaces qui satisfont à la condition

$$\mathrm{OP}.\mathrm{MN}=\lambda\,\overline{\mathrm{OM}}^2,$$

dans laquelle λ *désigne une constante donnée,* O *l'origine des coordonnées,* M *un point quelconque de l'une des surfaces,* P *le pied de la perpendiculaire abaissée de* O *sur le plan tangent en* M, *et* N *la trace de la normale sur le plan des xy.*

Soient x, y, z les coordonnées du point M; X, Y, Z les coordonnées courantes; l'équation du plan tangent en M sera

$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y),$$

en posant, pour simplifier,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q.$$

La normale au point M a pour équations

$$(X - x) + p(Z - z) = 0,$$
$$(Y - y) + q(Z - z) = 0.$$

La distance OP de l'origine au plan tangent a pour expression

$$OP = \frac{z - px - qy}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

La trace N de la normale sur le plan des xy ayant pour coordonnées

$$Z = 0, \quad X = x + pz, \quad Y = y + qz,$$

la longueur MN a pour expression

$$MN = z\sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Enfin, comme on a

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

l'équation de condition peut s'écrire

$$z(z - px - qy) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2),$$

ou

$$z - \frac{dz}{dx}x - \frac{dz}{dy}y = \lambda\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z};$$

telle est l'équation différentielle des surfaces cherchées.

On a donc à intégrer les équations simultanées

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

La première donne

$$\frac{y}{x} = C.$$

La seconde peut alors s'écrire

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - \lambda[(1 + C^2)x^2 + z^2]}{zx}.$$

En désignant par t une variable auxiliaire, et en posant

$$z = tx, \quad \text{d'où} \quad \frac{dz}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t,$$

elle devient

$$x\frac{dt}{dx} = -\frac{\lambda(1 + C^2 + t^2)}{t} \quad \text{ou} \quad -\lambda\frac{dx}{x} = \frac{t\,dt}{1 + C^2 + t^2};$$

et, en intégrant,

$$\log(1 + C^2 + t^2)^{\frac{1}{2}} + \log x^\lambda = \text{const.}$$

Remplaçons t par $\frac{z}{x}$, C par $\frac{y}{x}$, et passons aux fonctions inverses, nous aurons

$$x^{\lambda-1}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = C'.$$

En faisant $C' = \varphi(C)$, φ désignant une fonction arbitraire, on a, pour représenter toutes les surfaces cherchées, l'équation

$$x^{\lambda-1}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1875);

PAR M. MORET-BLANC.

Une conique donnée de forme et de grandeur se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. Dans chaque position, on mène à la conique des tangentes parallèles à la droite que décrit l'un des foyers. Déterminer le lieu des points de contact.

Soient $2c$ la distance des foyers, $2a$ et $2b$ les axes de la conique.

Je suppose d'abord que les deux droites données se rencontrent en un point O; je prends ce point pour origine des coordonnées rectangulaires, et la droite à laquelle les tangentes doivent être parallèles pour axe des x.

Soit

$$y = mx$$

l'équation de l'autre droite, α', $m\alpha'$ les coordonnées du foyer F' placé sur cette droite et α l'abscisse du foyer F placé sur la première. On a

$$(1)\qquad (\alpha' - \alpha)^2 + m^2\alpha'^2 = 4c^2.$$

Soient M le point de contact d'une tangente parallèle à Ox, x et y ses coordonnées, FP, F'P' les perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente; on a, par un théorème connu,

$$\text{FP}.\text{F}'\text{P}' = b^2,$$

ou

$$(2) \qquad y(y - m\alpha') = b^2.$$

Les triangles rectangles FPM, F′P′M, ayant un angle aigu égal en M, donnent

$$(3) \qquad \frac{y}{\alpha - x} = \frac{y - m\alpha'}{x - \alpha'}.$$

En éliminant α et α' entre les équations (1), (2) et (3), on aura pour l'équation du lieu

$$x = \frac{y^2 - b^2}{my} \pm \frac{b^2\sqrt{4c^2y^2 - (y^2 - b^2)^2}}{y(y^2 + b^2)}.$$

L'équation ne changeant pas quand on change à la fois les signes de x et de y, il suffit de considérer les valeurs positives de y, on obtiendra ainsi une première partie de la courbe ; la seconde sera symétrique de la première par rapport au point O.

Posons

$$X = \frac{b^2\sqrt{4c^2y^2 - (y^2 - b^2)^2}}{y(b^2 + y^2)},$$

et considérons d'abord le cas où la conique mobile est une ellipse. On a

$$x = \frac{y^2 - b^2}{my} \pm X,$$

y ne pouvant varier, pour la réalité de X, que de $a - c$ à $a + c$.

Si l'on construit entre ces ordonnées extrêmes l'arc d'hyperbole

$$x = \frac{y^2 - b^2}{my},$$

ayant pour asymptotes les deux droites données, ce sera une ligne diamétrale. A partir de chaque point de cette

ligne, on portera vers les abscisses positives et négatives la valeur correspondante de X. Si y croît de $a - c$ à $a + c$, X croît de zéro à un maximum, puis décroît de ce maximum à zéro. On obtient ainsi un ovale incliné auquel il faut adjoindre son symétrique par rapport au point O. X atteint son maximum pour la valeur de y déterminée par l'équation

$$8a^2y^4 = (y^2 + b^2)^3,$$

obtenue en égalant la dérivée de X à zéro.

Si la conique mobile est une hyperbole, y croissant de $c - a$ à b, X croît de zéro à l'infini, puis y croissant de b à $c + a$, X décroît de l'infini à zéro. On obtient ainsi une courbe discontinue composée de deux branches ayant pour asymptote la droite $y = b$, du côté des abscisses positives et du côté des abscisses négatives. Il faut y joindre la courbe symétrique par rapport au point O. On a ainsi quatre branches présentant huit points d'inflexion.

Lorsque les deux droites données sont rectangulaires, la ligne diamétrale devient l'axe des y; les deux droites données sont deux axes de symétrie.

Si les droites données sont parallèles, en appelant $2d$ leur distance, on a

$$y^2 - 2dy = b^2, \quad \text{d'où} \quad y = d \pm \sqrt{d^2 + b^2}.$$

Le lieu se compose de deux parallèles aux deux droites, ce qui était évident *a priori*.

Note. — La même question a été résolue par M. Gambey.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

RELATIONS DIFFÉRENTIELLES ENTRE LES FONCTIONS AUXILIAIRES.

Posons

$$y = \frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)};$$

on aura

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{H}'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,\mathrm{H}(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Or, en différentiant les formules (5), on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{H}'(x + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= - \mathrm{H}'(x)\, e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})} \\ &\quad + \mathrm{H}(x)\, e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}\, \frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}, \\ \Theta'(x + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) &= - \Theta'(x)\, e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})} \\ &\quad + \Theta(x)\, e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}\, \frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}. \end{aligned} \right.$$

Or les deux fonctions $\mathrm{H}(x)$ et $\Theta(x)$ possèdent la période $4\mathrm{K}$; il en est donc de même de $\mathrm{H}'(x)\,\Theta(x) - \Theta'(x)\,\mathrm{H}(x)$, et, quand on y change x en $x + 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, en vertu de (2), cette fonction devient

$$[\Theta(x)\,\mathrm{H}'(x) - \mathrm{H}(x)\,\Theta'(x)]\, e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})};$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 78, 211, 361, 385, 433, 481.

en d'autres termes, elle s'est trouvée multipliée par

$$e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})} = e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}2(x+K'\sqrt{-1})}.$$

Or les fonctions $\Theta(x)\mathrm{H}(x)$ et $\Theta_1(x)\mathrm{H}_1(x)$ sont dans ce cas; on doit donc poser

$$(3)\quad \mathrm{H}'(x)\Theta(x) - \mathrm{H}(x)\Theta'(x) = \mathrm{A}\Theta(x)\mathrm{H}(x) + \mathrm{B}\Theta_1(x)\mathrm{H}_1(x),$$

ou, en divisant par Θ^2 et en tenant compte de (1),

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}\frac{\mathrm{H}(x)}{\Theta(x)} + \mathrm{B}\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}\frac{\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Mais, si, dans (3), on change x en $-x$, on a

$$\mathrm{H}'(x)\Theta(x) - \mathrm{H}(x)\Theta'(x) = -\mathrm{A}\Theta(x)\mathrm{H}(x) + \mathrm{B}\Theta_1(x)\mathrm{H}_1(x),$$

et, en comparant cette formule avec (3), on a

$$\mathrm{A} = 0;$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{B}\frac{\Theta_1}{\Theta}\frac{\mathrm{H}_1}{\Theta}.$$

Si, dans (3), on fait $x = 0$, on a

$$\mathrm{H}'(0)\Theta(0) = \mathrm{B}\Theta_1(0)\mathrm{H}_1(0).$$

Tirant B de là, la formule précédente donne

$$(4)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{H}'(0)\Theta(0)}{\Theta_1(0)\mathrm{H}_1(0)}\frac{\Theta_1(x)\mathrm{H}_1(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Entre cette formule et les formules (1) et (2) du paragraphe précédent, éliminons $\Theta_1(x)$ et $\mathrm{H}_1(x)$; nous aurons

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\mathrm{H}'^2(0)}{\Theta^2(0)}\left[1 - \frac{\Theta_1^2(0)}{\mathrm{H}_1^2(0)}y^2\right]\left[1 - \frac{\mathrm{H}_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)}y^2\right].$$

Cette équation serait identique à celle qui nous a servi primitivement à définir le sinus de l'amplitude de x, si

l'on supposait

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{sn} x = \dfrac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} y = \dfrac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \dfrac{H(x)}{\Theta(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{k}} \dfrac{H(x)}{\Theta(x)}, \\ \dfrac{\Theta_1(0)}{H_1(0)} \dfrac{H'(0)}{\Theta(0)} = 1, \\ \dfrac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} = k, \end{cases}$$

et l'on aurait

$$\left(\frac{d \operatorname{sn} x}{dx}\right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 x)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x).$$

On a donc bien

$$\operatorname{sn} x = \frac{H(x)}{\Theta(x)} \frac{\Theta_1(0)}{H_1(0)},$$

et il est nettement établi que la fonction $\operatorname{sn} x$ est monodrome, puisqu'on peut la former de toutes pièces en la considérant comme le quotient de deux fonctions monodromes.

Maintenant reprenons les formules (1) et (2) du paragraphe précédent; on peut les écrire, en divisant par $\Theta^2(x)$,

$$1 = \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta(0)}{H_1^2(0)} + \frac{H_1^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)},$$

$$1 = \frac{H^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} + \frac{\Theta_1^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}.$$

La première, en vertu de (5), sera satisfaite en posant

$$\frac{H_1(x)}{\Theta(x)} \frac{\Theta(0)}{H_1(0)} = \cos \operatorname{am} x = \operatorname{cn} x,$$

et la dernière donnera

$$1 = k^2 \operatorname{sn}^2 x + \frac{\Theta_1^2(x)}{\Theta^2(x)} \frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)},$$

ou bien

$$\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}\frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 x} = \operatorname{dn}^2 x.$$

Elle donnera aussi, pour $x = K$,

$$1 = \frac{H^2(K)}{\Theta^2(K)}\frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} + \frac{\Theta_1^2(K)}{\Theta^2(K)}\frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)},$$

ou bien

$$1 = \frac{H_1^4(0)}{\Theta_1^4(0)} + \frac{\Theta^4(0)}{\Theta_1^4(0)}.$$

Le premier terme du second membre est k^2, le second est donc la quantité désignée plus haut par k'^2 ; k' est ce que nous avons appelé le *module complémentaire*. On a donc le tableau suivant :

TABLEAU N° 4.

$$[10]\quad \begin{cases} \operatorname{sn} x = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\dfrac{H(x)}{\Theta(x)}, \\ \operatorname{cn} x = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\dfrac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \\ \operatorname{dn} x = \sqrt{k'}\dfrac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}, \\ k = \dfrac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} = \dfrac{\Theta^2(0)}{H'^2(0)}, \quad k' = \dfrac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}, \quad \dfrac{k}{k'} = \dfrac{H_1^2(0)}{\Theta^2(0)} \end{cases}$$

$$k^2 + k'^2 = 1,$$

$$[11]\quad \begin{cases} K = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ K' = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}, \end{cases}$$

$$[12]\quad\left\{\begin{array}{lll}
\operatorname{sn} 0 = 0, & \operatorname{cn} 0 = 1, & \operatorname{dn} 0 = 1,\\
\operatorname{sn} K = 1, & \operatorname{cn} K = 0, & \operatorname{dn} K = k',\\
\operatorname{sn} 2K = 0, & \operatorname{cn} 2K = 1, & \operatorname{dn} 2K = 1,\\
\operatorname{sn} K'\sqrt{-1} = \infty, & \operatorname{cn} K'\sqrt{-1} = \infty, & \operatorname{dn} K'\sqrt{-1} = \infty,\\
\operatorname{sn}\left(2K + K'\sqrt{-1}\right) = \infty, & \operatorname{cn}\left(2K + K'\sqrt{-1}\right) = \infty, & \operatorname{dn}\left(2K + K'\sqrt{-1}\right) = \infty,\\
\operatorname{sn}\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{k}, & \operatorname{cn}\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = -\frac{k'\sqrt{-1}}{k}, & \operatorname{dn}\left(K + K'\sqrt{-1}\right) = 0,
\end{array}\right.$$

$$[13]\quad\left\{\begin{array}{lll}
\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}(-x) = \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}(-x) = \operatorname{dn} x,\\
\operatorname{sn}(2K - x) = \operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}(2K - x) = \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}(2K - x) = \operatorname{dn} x,\\
\operatorname{sn}(2K + x) = -\operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}(2K + x) = \operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}(2K + x) = \operatorname{dn} x,\\
\operatorname{sn}(K - x) = \dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{cn}(K - x) = k'\dfrac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{dn}(K - x) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} x},\\
\operatorname{sn}(K + x) = \dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{cn}(K + x) = -k'\dfrac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, & \operatorname{dn}(K + x) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} x},\\
\operatorname{sn}\left(K'\sqrt{-1} + x\right) = \dfrac{1}{k \operatorname{sn} x}, & \operatorname{cn}\left(K'\sqrt{-1} + x\right) = -\sqrt{-1}\,\dfrac{\operatorname{dn} x}{k \operatorname{sn} x}, & \operatorname{dn}\left(K'\sqrt{-1} + x\right) = -\sqrt{-1}\,\dfrac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x},\\
\operatorname{sn}\left(2K'\sqrt{-1} + x\right) = \operatorname{sn} x, & \operatorname{cn}\left(2K'\sqrt{-1} + x\right) = -\operatorname{cn} x, & \operatorname{dn}\left(2K'\sqrt{-1} + x\right) = -\operatorname{dn} x.
\end{array}\right.$$

[14]

Fonctions.	Périodes.	Zéros.	Infinis.
$\operatorname{sn} x$	$4K,\ 2K'\sqrt{-1}$,	$0,\ 2K$,	$K'\sqrt{-1},\ 2K + K'\sqrt{-1}$,
$\operatorname{cn} x$	$2K,\ 2K + 2K'\sqrt{-1}$,	$K,\ -K$,	$K'\sqrt{-1},\ 2K + K'\sqrt{-1}$,
$\operatorname{dn} x$.	$2K,\ 2K'\sqrt{-1}$,	$\pm K + K'\sqrt{-1}$,	$K'\sqrt{-1},\ 2K + K'\sqrt{-1}$.

RELATIONS ENTRE $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$ ET $\mathrm{dn}\,x$.

A la fonction $\mathrm{sn}\,x$, définie par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \tag{1}$$

nous avons adjoint les fonctions

$$\begin{cases} \mathrm{cn}\,x = v = \sqrt{1-u^2}, \\ \mathrm{dn}\,x = w = \sqrt{1-k^2u^2}. \end{cases} \tag{2}$$

La formule (1) pourra alors s'écrire

$$\frac{du}{dx} = \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x = vw.$$

Des formules (2) on déduira

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} = -uw,$$

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{k^2u}{\sqrt{1-k^2u^2}}\frac{du}{dx} = -k^2vu.$$

Ainsi on a

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\mathrm{sn}\,x}{dx} = \mathrm{cn}\,x\,\mathrm{dn}\,x, \\ \dfrac{d\,\mathrm{cn}\,x}{dx} = -\mathrm{dn}\,x\,\mathrm{sn}\,x, \\ \dfrac{d\,\mathrm{dn}\,x}{dx} = -k^2\mathrm{sn}\,x\,\mathrm{cn}\,x. \end{cases} \tag{3}$$

Maintenant, si l'on observe que

$$u = \sqrt{1-v^2} = \frac{1}{k}\sqrt{1-w^2}, \quad v = \frac{\sqrt{w^2-k'^2}}{k}; \quad w = \sqrt{k'^2+k^2v^2},$$

les formules (3) pourront s'écrire

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

$$\frac{dv}{dx} = -\sqrt{(1-v^2)(k'^2+k^2v^2)},$$

$$\frac{dw}{dx} = -k\sqrt{(w^2-k'^2)(1-w^2)}.$$

Rien n'est plus simple, en partant des formules (3), que de former les équations auxquelles satisferaient $\operatorname{tang}\operatorname{am}x$, $\cot\operatorname{am}x$, ... On formera ainsi le tableau suivant :

TABLEAU N° 5.

[15] $$\left\{\begin{aligned} \frac{d\operatorname{sn}x}{dx} &= \operatorname{cn}x\operatorname{dn}x, \\ \frac{d\operatorname{cn}x}{dx} &= -\operatorname{dn}x\operatorname{sn}x, \\ \frac{d\operatorname{dn}x}{dx} &= -k^2\operatorname{sn}x\operatorname{cn}x. \end{aligned}\right.$$

[16]

Fonctions.	Leur équation différentielle.
$u = \operatorname{sn}x$,	$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}$,
$u = \operatorname{cn}x$,	$\frac{du}{dx} = -k'\sqrt{(1-u^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}u^2\right)}$,
$u = \operatorname{dn}x$,	$\frac{du}{dx} = -\sqrt{(1-u^2)(u^2-k'^2)}$,
$u = \operatorname{tang}\operatorname{am}x$,	$\frac{du}{dx} = \sqrt{(1+u^2)(1+k'^2u^2)}$,
$u = \cot\operatorname{am}x$,	$\frac{du}{dx} = -\sqrt{(1+u^2)(k'^2+u^2)}$,
$u = \operatorname{séc}\operatorname{am}x$,	$\frac{du}{dx} = -k'\sqrt{(u^2-1)\left(u^2-\frac{k^2}{k'^2}\right)}$,
$u = \operatorname{coséc}\operatorname{am}x$,	$\frac{du}{dx} = \sqrt{(u^2-1)(u^2-k^2)}$,
$u = \frac{1}{\operatorname{dn}x}$,	$\frac{du}{dx} = \sqrt{(u^2-1)(1-k'^2u^2)}$.

Ce dernier tableau est utile pour la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{du}{\sqrt{(u^2+m)(u^2+n)}}$$

aux fonctions elliptiques.

FORMULES D'ADDITION.

Considérons maintenant le produit

$$\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a) = \theta(x);$$

on a (tableau n° 1)

$$\theta(x+2\mathrm{K}) = \theta(x),$$

$$\theta(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \theta(x)\,e^{-2\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}.$$

Les fonctions H^2 et Θ^2 satisfont à la même équation; donc

$$\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a) = \mathrm{A}\mathrm{H}^2(x) + \mathrm{B}\Theta^2(x).$$

Pour déterminer A et B, on fera $x = 0$; on aura alors

$$-\mathrm{H}^2(a) = \mathrm{B}\Theta^2(0).$$

On fera ensuite $x = \mathrm{K}'\sqrt{-1}$; on aura alors

$$\mathrm{H}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+a)\,\mathrm{H}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-a) = \mathrm{A}\mathrm{H}^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1})$$

ou

$$-\Theta(a)\,\Theta(-a) = -\mathrm{A}\,\Theta^2(0).$$

On a donc

$$\mathrm{B} = -\frac{\mathrm{H}^2(a)}{\Theta^2(0)}, \quad \mathrm{A} = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)},$$

et, par suite,

$$\mathrm{H}(x+a)\,\mathrm{H}(x-a) = \frac{\Theta^2(a)\,\mathrm{H}^2(x) - \mathrm{H}^2(a)\,\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}.$$

On obtient de la même façon une foule d'autres formules, que nous résumons dans le tableau ci-après.

TABLEAU N° 6.

[17]
$$\begin{cases} \mathrm{H}(x-a)\,\mathrm{H}(x+a) = \dfrac{\Theta^2(a)\,\mathrm{H}^2(x) - \mathrm{H}^2(a)\,\Theta^2(x)}{\Theta^2(0)}, \\ \mathrm{H}(x-a)\,\Theta(x+a) \\ \quad = \dfrac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta_1(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)}\,\mathrm{H}(x)\,\Theta(x) - \dfrac{\mathrm{H}(a)\,\Theta(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0)}\,\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1(x), \\ \mathrm{H}(x-a)\,\mathrm{H}_1(x+a) \\ \quad = \dfrac{\Theta_1(a)\,\Theta(a)}{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}\,\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}_1(x) - \dfrac{\mathrm{H}(a)\,\Theta(a)}{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}\,\Theta(x)\,\Theta_1(x), \\ \mathrm{H}(x-a)\,\Theta_1(x+a) \\ \quad = \dfrac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)}\,\mathrm{H}(x)\,\Theta_1(x) - \dfrac{\mathrm{H}(a)\,\Theta_1(a)}{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(0)}\,\Theta(x)\,\mathrm{H}_1(x); \end{cases}$$

[18]
$$\begin{cases} \Theta(x-a)\,\Theta(x+a) = \dfrac{\Theta^2(a)\,\Theta^2(x) - \mathrm{H}^2(a)\,\mathrm{H}^2(x)}{\Theta^2(0)}, \\ \Theta(x-a)\,\mathrm{H}(x+a) \\ \quad = \dfrac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta_1(a)\,\mathrm{H}(x)\,\Theta(x) + \mathrm{H}(a)\,\Theta(a)\,\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}_1(0)}, \\ \Theta(x-a)\,\mathrm{H}_1(x+a) \\ \quad = \dfrac{\Theta(a)\,\Theta_1(a)\,\mathrm{H}(x)\,\mathrm{H}_1(x) - \mathrm{H}(a)\,\Theta(a)\,\Theta(x)\,\Theta_1(x)}{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}, \\ \Theta(x-a)\,\Theta_1(x+a) \\ \quad = \dfrac{\mathrm{H}_1(a)\,\Theta(a)\,\mathrm{H}(x)\,\Theta_1(x) - \mathrm{H}(a)\,\Theta_1(a)\,\Theta(x)\,\mathrm{H}_1(x)}{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(0)}. \end{cases}$$

En combinant ces formules par voie de division, et en ayant égard aux formules du tableau n° 4, on trouve, par exemple, en divisant la première [17] par la seconde [17],

$$\operatorname{sn}(x+a) = \frac{\operatorname{sn}^2 x - \operatorname{sn}^2 a}{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x},$$

et, en multipliant haut et bas par

$$\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$$

$$\operatorname{sn}(x+a) = \frac{\operatorname{sn} x \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a + \operatorname{sn} a \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x};$$

c'est par ce moyen que l'on formera le tableau suivant :

TABLEAU N° 7.

[19] $$\begin{cases} \operatorname{sn}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b \pm \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{cn}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \mp \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}, \\ \operatorname{dn}(a \pm b) = \dfrac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \mp k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}. \end{cases}$$

Pour $a = b$:

[20] $$\begin{cases} \operatorname{sn} 2a = \dfrac{2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a}, \\ \operatorname{cn} 2a = \dfrac{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a}, \\ \operatorname{dn} 2a = \dfrac{\operatorname{dn}^2 a - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^4 a}. \end{cases}$$

[21] $$\begin{cases} \operatorname{sn}(a+b) + \operatorname{sn}(a-b) = G \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{sn}(a+b) - \operatorname{sn}(a-b) = G \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a, \\ \operatorname{cn}(a+b) + \operatorname{cn}(a-b) = G \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b, \\ \operatorname{cn}(a+b) - \operatorname{cn}(a-b) = -G \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{dn}(a+b) + \operatorname{dn}(a-b) = G \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b, \\ \operatorname{dn}(a+b) - \operatorname{dn}(a-b) = -G k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b. \end{cases}$$

On a posé

$$G = \frac{2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

Les formules d'addition [19] sont les premières que l'on ait trouvées sur les fonctions directes. Elles sont analogues aux formules fondamentales de la Trigonométrie; mais ce n'est pas comme nous venons de le montrer qu'elles ont été trouvées.

C'est en intégrant l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \pm \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

que l'on est arrivé à la découverte des formules d'addition. La méthode la plus simple qui ait été donnée pour l'intégration de cette formule est due à Lagrange. D'autres méthodes, plus simples en apparence, ont l'inconvénient de s'appuyer sur des artifices qui supposent évidemment que l'on connaît d'avance l'intégrale.

(*A suivre.*)

THÉORÈME SUR LA GÉOMÉTRIE DES QUINCONCES;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Les sommets ou les centres d'un échiquier quelconque ne sont jamais situés aux sommets d'un triangle équilatéral.

En effet, si l'on prend l'un des sommets pour origine des coordonnées rectangulaires, et si l'on désigne par (a, b) et (c, d) les coordonnées des deux autres sommets, on devrait avoir

$$a^2+b^2 = c^2+d^2 = (a-c)^2+(b-d)^2,$$

ou

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 + 2(ac + bd),$$

et, par suite,

$$3(a^2 + b^2) = (a + c)^2 + (b + d)^2.$$

Donc le nombre 3 diviserait une somme de deux carrés, que l'on peut supposer premiers entre eux; ce qui est impossible.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1232

(voir 2e série, t. XVI, p. 236);

PAR M. H. LEZ.

En un point M *d'une conique, on construit la parabole osculatrice et l'on prend le symétrique* P *du foyer de cette parabole par rapport à la tangente en* M : *démontrer que le point* M *et son symétrique* N *par rapport à* P *sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.*

(LAGUERRE.)

Prenant pour axe des x la normale au point M et pour axe des y la tangente au même point, on pourra écrire, pour l'équation de la conique,

$$ax^2 + 2hxy + y^2 - 2px = 0;$$

le centre de cette conique a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{a - h^2}, \quad y = -\frac{ph}{a - h^2}.$$

Une tangente parallèle à la normale en M rencontrant l'axe des y en deux points donnés par l'équation

$$(h^2 - a)y^2 - 2hpy + p^2 = 0,$$

on détermine facilement le rayon R du cercle concentrique, lieu des angles droits circonscrits à la conique : il est égal à $\frac{p\sqrt{1+a}}{a-h^2}$.

L'équation de ce cercle est donc

$$\left(x - \frac{p}{a-h^2}\right)^2 + \left(y + \frac{ph}{a-h^2}\right)^2 = \frac{p^2(1+a)}{(a-h^2)^2}.$$

Les coordonnées du point N, pris sur OM de manière que OM.ON $= \mathrm{R}^2$, sont celles du pôle, par rapport au cercle en question, de la droite $x - hy = 0$ perpendiculaire à OM; on trouve pour leurs valeurs

$$x' = -\frac{p}{1+h^2}, \quad y' = \frac{hp}{1+h^2}.$$

L'équation d'une parabole tangente en M à l'axe des y peut s'écrire

$$m^2x^2 + 2mxy + y^2 - 2\lambda x = 0.$$

Retranchons-la de l'équation de la conique et écrivons que la seconde corde d'intersection

$$(a^2 - m^2)x + 2(h - m)y - 2(p - \lambda) = 0$$

se réduit à l'axe des y, il en résultera

$$m = h, \ \lambda = p,$$

et l'on aura, pour l'équation de la parabole osculatrice,

$$(hx + y)^2 - 2px = 0.$$

A l'aide de formules connues, on trouve pour les coor-

données du foyer

$$x = \frac{p}{2(1+h^2)}, \quad y = \frac{ph}{2(1+h^2)};$$

son symétrique P par rapport à la tangente en M est donc le milieu du segment MN.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1237

(voir 2e série, t. XVI, p. 287);

PAR M. CAURET,
Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

Ayant posé, pour abréger,

$$P = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$Q = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2},$$

$$R = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2},$$

$$S = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers donnés, on propose de décomposer, au moyen de formules directes, l'expression

$$P^2+Q^2+R^2+S^2$$

en deux facteurs représentés chacun par une somme de quatre carrés entiers. (S. REALIS.)

Posons

$$A = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \quad \text{et} \quad 2B = \alpha+\beta+\gamma+\delta,$$

il vient

$$P = \frac{A}{2} + B - \alpha, \quad Q = \frac{A}{2} + B - \beta,$$

$$R = \frac{A}{2} + B - \gamma, \quad S = \frac{A}{2} + B - \delta;$$

d'où

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = A(A + 2B + 1)$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta + \alpha + \beta + \gamma + \delta + 1)$$
$$= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)[(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 + (2\gamma + 1)^2].$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins, et Moret-Blanc.

Question 1241

(voir 2e série, t. XVI, p. 288);

PAR M. J. CHAMBON,
Élève du lycée de Bordeaux.

Trouver l'enveloppe d'un plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde. Montrer que ce lieu est le même que celui du centre de la section faite dans la surface par le plan variable.

(GENTY.)

Solution analytique. — Supposons l'ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes; son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si nous considérons un point (α, β, γ), le plan polaire de ce point sera

$$(1) \qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 1;$$

et, pour que ce plan passe par les extrémités de trois

diamètres conjugués, il suffit que α, β, γ satisfassent à la relation

$$(2)\qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} = 3$$

$\left(\text{en se rappelant que } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 3\right.$ est le lieu des sommets des trièdres circonscrits à l'ellipsoïde et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués$\left.\right)$.

Pour avoir l'enveloppe des plans représentés par l'équation (1), on n'a qu'à éliminer α, β, γ entre les équations (1), (2) et les suivantes :

$$\frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_\gamma}{\varphi'_\gamma}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{\alpha}{a^2}} = \frac{\frac{y}{b^2}}{\frac{\beta}{b^2}} = \frac{\frac{z}{c^2}}{\frac{\gamma}{c^2}}.$$

L'élimination se fait immédiatement, en mettant ces dernières équations sous la forme

$$\frac{\frac{\alpha x}{a^2}}{\frac{\alpha^2}{a^2}} = \frac{\frac{\beta y}{b^2}}{\frac{\beta^2}{b^2}} = \frac{\frac{\gamma z}{c^2}}{\frac{\gamma^2}{b^2}} = \frac{1}{3},$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 3x, \quad \beta = 3y, \quad \gamma = 3z.$$

Le lieu cherché est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3}.$$

C'est un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde donné.

Il est facile de voir que ce lieu est le même que celui des centres des sections faites dans l'ellipsoïde par des plans satisfaisant aux conditions du problème. On sait,

en effet, que le centre d'une section faite par un plan est le point d'intersection de ce plan avec le diamètre qui lui est conjugué. Pour avoir ce dernier lieu, il n'y aurait qu'à éliminer α, β, γ entre les trois relations

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{z^2} = 3.$$

Ce sont précisément les trois relations qui ont servi à trouver le lieu précédent.

Solution géométrique. — Considérons le parallélépipède construit sur trois demi-diamètres conjugués pris pour arêtes aboutissant au même sommet : le lieu du sommet opposé à celui-ci est un ellipsoïde dont les demi-axes sont $a\sqrt{3}$, $b\sqrt{3}$, $c\sqrt{3}$, a, b, c étant les demi-axes de l'ellipsoïde donné.

Or on sait que, si l'on mène le plan passant par les extrémités A, B, C des diamètres conjugués OA, OB, OC, ce plan coupe la diagonale du parallélépipède au tiers de sa longueur à partir du point O. On voit ainsi que le lieu M du sommet du parallélépipède opposé au sommet O, le lieu N du centre de la section faite par le plan ABC, sont deux ellipsoïdes homothétiques à l'ellipsoïde donné.

Cela étant admis, menons le diamètre conjugué au plan ABC et le plan tangent à l'ellipsoïde M au point où cet ellipsoïde est rencontré par le diamètre, ce plan tangent sera parallèle au plan ABC. Or l'enveloppe de ce plan tangent est l'ellipsoïde M; donc l'enveloppe du plan ABC est l'ellipsoïde N. C. Q. F. D.

Note. — Solutions analogues par MM. F. Pisani, professeur à Girgenti; Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon; H. Dessoudeix, élève du lycée de Bordeaux; Moret-Blanc; V. Jamet, professeur au lycée de Saint-Brieuc; E. Dunoyer, élève du lycée de Marseille; Cl. Talon, élève au lycée de Moulins; P. Barbarin, élève de l'École normale.

Question 1248

(voir 2e série, t. XVI, p. 336);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Démontrer que $\sqrt{5}$ est égal à la limite du rapport des deux séries

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\ldots \quad \text{et} \quad \frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{29}+\ldots,$$

dans lesquelles chacun des dénominateurs est donné par la relation

$$D_{n+2} = 3D_{n+1} - D_n.$$

(E. LUCAS.)

Lorsqu'une fonction de n est déterminée par l'équation

$$y_{n+2} = xy_{n+1} - y_n,$$

et par les conditions initiales

$$y_0 = 1, \quad y_1 = x + a,$$

on peut représenter cette fonction par l'expression

$$y_n = \frac{1 + az - (a+z)z^{2n+1}}{z^n(1-z^2)},$$

où z est l'une des deux racines de l'équation

$$z^2 - xz + 1 = 0.$$

Pour la première des deux séries proposées, on a

$$a = -1;$$

les dénominateurs successifs sont donc donnés par la formule

$$\mathrm{D}_n = \frac{1 + z^{2n+1}}{z^n(1+z)},$$

et le terme général de la série est

$$(1+z)\frac{z^n}{1+z^{2n+1}}.$$

Pour la seconde série, $a = 1$; on a

$$\mathrm{D}_n = \frac{1 - z^{2n+1}}{z^n(1-z)},$$

et, comme les signes sont alternés, le terme général est

$$(1-z)\frac{(-1)^n z^n}{1-z^{2n+1}}.$$

Il résulte de cela que le rapport des deux séries proposées est

$$\frac{1+z}{1-z}\frac{\left(\frac{1}{1+z} + \frac{z}{1+z^3} + \frac{z^2}{1+z^5} + \ldots\right)}{\left(\frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z^3} + \frac{z^2}{1-z^5} - \ldots\right)} = \frac{1+z}{1-z}\frac{f(z)}{\varphi(z)}.$$

Supposons maintenant que x soit plus grand que 2, et que l'on choisisse, pour z, celle des deux racines de l'équation donnée plus haut, qui est plus petite que l'unité; tous les termes de $f(z)$ et de $\varphi(z)$ pourront se développer en séries convergentes. Développons, par exemple, $f(z)$; on aura

$$f(z) = \left\{\begin{array}{l} \quad 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots \\ + z - z^4 + z^7 - z^{10} + z^{13} - \ldots \\ + z^2 - z^7 + z^{12} - z^{17} + z^{22} - \ldots \\ + z^3 - z^{10} + z^{17} - z^{24} + z^{31} - \ldots \\ + z^4 - z^{13} + z^{22} - z^{31} + z^{40} - \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

et, en faisant les sommes des colonnes verticales, on retrouve les termes successifs de $\varphi(z)$. Ainsi $f(z) = \varphi(z)$, ce qui montre, en passant, que la fonction $f(z)$ est paire, puisque $\varphi(z)$ n'est autre chose que $f(-z)$; il s'ensuit, d'autre part, que le rapport des deux séries considérées se réduit à

$$\frac{1+z}{1-z} = \sqrt{\frac{1-z^2+2z}{1+z^2-2z}} = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}.$$

Dans le cas particulier de la question 1248, on a $x = 3$, et le rapport des deux séries est bien égal à $\sqrt{5}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. J. de Virieu, professeur à Lyon; H.-J. Krantz, à Bréda.

Question 1249

(voir 2e série, t. XVI, p. 384);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

On a la série rapidement convergente

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.47} + \frac{1}{3.7.47.2207} + \ldots,$$

dans laquelle chacun des facteurs du dénominateur est égal au carré du précédent diminué de deux unités.

(E. LUCAS.)

Soit posé

$$y_0 = 3, \quad y_1 = 7, \quad y_2 = 47, \quad \ldots,$$

et, en général,

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2.$$

On peut évidemment représenter y_n par l'expression

$$y_n = x^{2^n} + \frac{1}{x^{2^n}}.$$

où x est l'une quelconque des deux racines de l'équation

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

On déduit de là

$$y_0 = \frac{1 + x^2}{x}, \quad y_1 = \frac{1 + x^4}{x^2}, \quad y_2 = \frac{1 + x^8}{x^4}, \quad \ldots,$$

et la série proposée devient

$$\frac{1}{x}\left[\frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{x^4}{(1 + x^2)(1 + x^4)} + \frac{x^8}{(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)} + \ldots\right].$$

Or la série écrite entre crochets est connue : c'est un cas particulier de celle qui a fait l'objet de la question 1181 (*voir* t. XV, 2e série, p. 135 et 180), et l'on sait qu'elle a pour limite 1 ou x^2, suivant que x est plus grand ou plus petit que l'unité.

Il résulte de cela que la somme de la série proposée est égale à la plus petite racine de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$, c'est-à-dire à $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Autrement. — On peut toujours poser

$$\frac{y_0 - \alpha}{2} = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \frac{1}{y_0 y_1 y_2} + \ldots,$$

et chercher à déterminer α.

Or, si l'on élimine successivement du second membre $y_0, y_1, y_2, \ldots$, on obtient

$$\frac{y_1 - \alpha y_0}{2} = \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_1 y_2} + \ldots,$$

$$\frac{y_2 - \alpha y_0 y_1}{2} = \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_2 y_3} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{y_n - \alpha y_0 y_1 \ldots y_{n-1}}{2} = \frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \ldots$$

Lorsque n augmente indéfiniment, le second membre de la dernière de ces égalités tend vers zéro; on a donc

$$\alpha = \lim \frac{y_n}{y_0 y_1 \ldots y_{n-1}}.$$

Cela posé, la relation générale

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2$$

donne, par son élévation au carré,

$$y_n^2 - 4 = y_{n-1}^2 (y_{n-1}^2 - 4).$$

On en déduit facilement

$$y_n^2 - 4 = y_0^2 y_1^2 y_2^2 \ldots y_{n-1}^2 (y_0^2 - 4),$$

et l'on voit que

$$\lim \frac{y_n}{y_0 y_1 \ldots y_{n-1}} = \sqrt{y_0^2 - 4} = \alpha = \sqrt{5}.$$

Remarque. — On peut remarquer que l'on a, en général,

$$\left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{y_n y_{n+1}} + \frac{1}{y_n y_{n+1} y_{n+2}} + \ldots \right)$$
$$= \left(\frac{1}{y_{n-1}} + \frac{1}{y_{n-1} y_n} + \ldots \right)^2.$$

Il est facile de voir également que

$$\left(1 - \frac{1}{y_0}\right)\left(1 - \frac{1}{y_1}\right)\left(1 - \frac{1}{y_2}\right) \ldots = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Vladimir Habbé, Moret-Blanc et J. de Virieu.

Question 1250

(voir 2e série, t. XVI, p. 384);

Par M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Recherche des lignes telles que la corde qui sous-tend leurs intersections avec les côtés d'un angle droit pivotant sur un point fixe enveloppe un cercle autour de ce point.

On sait que l'ellipse, rapportée à son centre, forme un cas particulier de cette catégorie de courbes.

(Haton de la Goupillière.)

Prenons, pour coordonnées d'un point quelconque M de la courbe cherchée, sa distance $OM = \rho$ au point fixe O choisi pour origine et l'angle $XOM = z$ que fait le rayon vecteur OM avec une droite quelconque OX passant par le point O. Menons le rayon vecteur $OM' = \rho'$ perpendiculaire sur OM, et traçons la hauteur OH du triangle OMM'.

Pour que la corde MM' enveloppe un cercle autour du point O lorsque l'angle droit MOM' pivote sur ce point, il faut et il suffit que la distance OH de cette corde à l'origine reste constante quand l'angle z varie; par suite, la relation

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{\overline{OH}^2},$$

existant entre les côtés de l'angle droit et la hauteur du triangle rectangle OMM', devra avoir lieu, avec une même valeur de OH, pour tous les couples de rayons vecteurs rectangulaires.

Cela posé, on peut toujours concevoir que l'équation

de la courbe cherchée soit mise sous la forme

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{2r^2} + f(z),$$

r étant une constante.

Il s'ensuit

$$\frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{2r^2} + f\left(z + \frac{\pi}{2}\right),$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho'^2} = \frac{1}{r^2} + f(z) + f\left(z + \frac{\pi}{2}\right).$$

On voit donc que la condition (1) sera remplie si l'on a, quel que soit z,

$$(3)\qquad f\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -f(z).$$

Ainsi l'équation (2) est l'équation générale des courbes jouissant de la propriété énoncée, si la fonction $f(z)$ satisfait à la seule condition de changer de signe lorsque la variable augmente de $\frac{\pi}{2}$: r est le rayon du cercle enveloppe des cordes correspondant à deux rayons vecteurs rectangulaires.

La fonction $f(z)$ est périodique; en effet, si, dans l'équation (3), on augmente z de $\frac{\pi}{2}$, il vient

$$f(z+\pi) = -f\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = f(z).$$

La période est π, ce qui montre que le point O est un centre de la courbe.

Cherchons à mettre $f(z)$ sous une forme plus explicite.

Si l'on ne considère que des fonctions ayant une valeur

unique et bien déterminée pour chaque valeur de la variable, $f(z)$ ne peut être qu'une combinaison de fonctions simplement et doublement périodiques jouissant de cette même propriété et admettant la période π. Or les premières s'expriment au moyen de $\sin 2z$ et de $\cos 2z$; les secondes s'expriment au moyen des fonctions elliptiques qui, lorsqu'elles admettent la période π, peuvent aussi être représentées à l'aide de $\sin 2z$ et de $\cos 2z$; donc, en définitive, on pourra remplacer l'équation (2) par la suivante :

$$(4) \qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{2r^2} + \varphi(\sin 2z, \cos 2z),$$

où φ désigne une fonction arbitraire soumise à la seule condition d'être impaire, c'est-à-dire de changer de signe lorsque les variables $\sin 2z$ et $\cos 2z$ changent elles-mêmes de signe toutes les deux en même temps.

Prenons pour exemple la fonction impaire simple

$$\varphi(\sin 2z, \cos 2z) = \frac{1}{2r^2}(p \sin 2z + q \cos 2z);$$

il en résulte

$$\rho^2 = \frac{2r^2}{1 + p \sin 2z + q \cos 2z},$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$(1 + q)x^2 + (1 - q)y^2 + 2pxy = 2r^2,$$

équation d'une conique rapportée à son centre.

Dans le cas d'une ellipse dont les axes sont a et b, on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2};$$

le cercle enveloppe est toujours réel et fini.

Dans le cas de l'hyperbole, on a

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2};$$

le cercle enveloppe n'est réel et fini que si l'axe transverse est plus petit que l'axe non transverse.

Note. — La même question a été résolue par MM. Vladimir Habbé et Moret-Blanc.

CORRESPONDANCE.

M. Kœnigs, élève de l'École de l'Immaculée Conception, à Toulouse, a envoyé une solution géométrique de la question 34, déjà résolue analytiquement, même tome, p. 39.

M. Eugène Delmas, élève du lycée de Lyon, a envoyé une solution de la question 1230, résolue déjà, même tome, p. 46.

M. P. Barbarin, élève de l'École Normale, a envoyé une solution détaillée de la question 1049, déjà résolue, 2e série, t. XII, p. 328. Il arrive à ce résultat intéressant que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une hypocycloïde à $2p+1$ rebroussements est une circonférence de cercle.

M. Ed. Guillet, maître répétiteur au lycée de Moulins, a envoyé une solution géométrique très-simple de la question 1209, déjà résolue, 2e série, t. XV, p. 555.

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES ;

Par M. A. TISSOT.

[SUITE (1).]

CHAPITRE PREMIER.

Préliminaires.

1. Pour représenter une surface sur une autre, on imagine que chacune se trouve décomposée, par deux systèmes de lignes, en parallélogrammes infiniment petits, et, à chaque ligne de la première, on fait correspondre une des lignes de la seconde; alors, l'intersection de deux lignes de systèmes différents sur l'une, et l'intersection des deux lignes correspondantes sur l'autre, déterminent deux points correspondants; enfin l'ensemble des points de la seconde qui correspondent aux points d'une figure donnée de la première constitue la *représentation* ou la *projection* de cette figure. On obtient les divers modes de représentation en faisant varier les deux séries de lignes qui tracent le canevas sur l'une des surfaces.

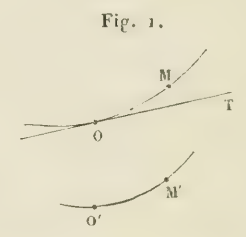
2. A moins que les deux surfaces ne soient applicables l'une sur l'autre, il est impossible de choisir un mode de projection tel qu'il y ait similitude entre toute figure tracée sur la première et la figure correspondante

(1) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 49.

de la seconde. Au contraire, quelles que soient les deux surfaces, il existe une infinité de systèmes de projection conservant les angles, et tels, par conséquent, que chaque figure *infiniment petite* et sa représentation soient semblables entre elles. Il en existe une infinité d'autres conservant les aires. Néanmoins ces deux classes de systèmes constituent des exceptions : un mode de projection étant pris au hasard, il arrivera généralement que les angles se trouveront modifiés, si ce n'est en des points particuliers, et que les aires correspondantes n'auront pas entre elles un rapport constant.

Les longueurs seront aussi altérées. Considérons deux courbes qui se correspondent sur les deux surfaces;

Fig. 1.



soient O et M (*fig.* 1) deux points de l'une, O' et M' les points correspondants de l'autre, et OT la tangente en O à la première courbe. Si le point M se rapproche indéfiniment du point O, le point M' se rapprochera indéfiniment du point O', et le rapport de la longueur de l'arc O'M' à celle de l'arc OM tendra vers une certaine limite : c'est cette limite que nous appellerons le *rapport de longueurs*, au point O, sur la courbe OM ou suivant la direction OT. Dans un système de projection conservant les angles, le rapport ainsi défini a la même valeur pour toutes les directions qui partent d'un même point, mais il varie avec la position de ce point, à moins que les deux surfaces ne soient applicables l'une sur

l'autre. Lorsque la représentation ne conserve les angles qu'en des points particuliers, le rapport de longueurs en tout autre point change avec la direction.

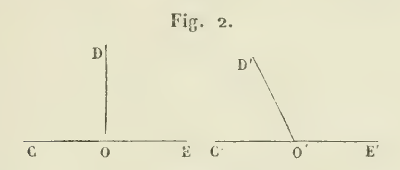
Loi de la déformation.

3. La déformation produite autour de chaque point est soumise à une loi qui ne dépend ni de la nature des surfaces ni du mode de projection :

Toute représentation d'une surface sur une autre peut être remplacée par une infinité de projections orthogonales faites chacune à une échelle convenable.

Remarquons d'abord qu'il existe toujours en chaque

Fig. 2.



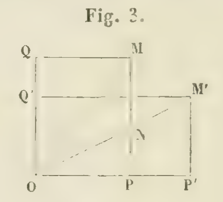
point de la première surface deux tangentes perpendiculaires l'une à l'autre, telles que les directions qui leur correspondent sur la seconde surface se coupent aussi à angle droit. Soient en effet CE et OD (*fig.* 2) deux droites perpendiculaires entre elles et tangentes en un point O à la première surface ; soient C'E' et O'D' les tangentes correspondantes pour la seconde. Supposons que, des deux angles C'O'D, D'O'E', le premier soit aigu, et imaginons qu'un angle droit ayant son sommet en O tourne de gauche à droite, autour de ce point, dans le plan CDE, en partant de la position COD pour arriver à la position DOE. L'angle correspondant, dans le plan tangent en O' à la seconde surface, se confondra d'abord avec C'O'D', et sera aigu ; en dernier lieu, il coïncidera avec D'O'E', et sera obtus ; dans l'intervalle, il aura

donc été droit. Ainsi il existe un système de deux tangentes satisfaisant à la condition énoncée [1].

De cette propriété on conclut que, dans tout mode de représentation, il y a, sur la première des deux surfaces, un système de deux séries de lignes orthogonales dont les projections sur la seconde sont aussi orthogonales. Les deux surfaces se trouvent ainsi décomposées en rectangles infiniment petits qui se correspondent de l'une à l'autre.

Cela posé, soit M (*fig.* 3) un point infiniment voisin de O, sur la première surface, et soit OPMQ celui d'entre les rectangles infiniment petits dont nous venons de parler, qui a pour diagonale OM. Déplaçons la seconde surface, et donnons-lui une position telle que les projections des côtés OP, OQ tombent sur ces côtés eux-mêmes, prolongés s'il est nécessaire; soit alors O′P′M′Q′ le rectangle correspondant à OPMQ; appelons N le point de rencontre des droites OM′ et PM. On peut considérer ce point comme la projection orthogonale de la position que prendrait M si l'on faisait tourner d'un angle conve-

Fig. 3.



[1] La démonstration suppose que la représentation n'altère pas la continuité et qu'à deux directions de sens contraires partant du point considéré sur l'une des surfaces correspondent, sur l'autre, deux directions aussi de sens contraires. Il peut donc y avoir exception à la loi de la déformation en certains points particuliers; par exemple, il en sera ainsi aux pôles terrestres quand les angles des méridiens de la carte seront proportionnels à ceux des méridiens du globe sans leur être égaux.

nable, autour de OP, le plan du rectangle OPMQ. Or cet angle, qui ne dépend que du rapport des deux lignes NP, MP, est le même quel que soit M; car, en désignant respectivement par a et b les rapports de longueurs suivant les directions OP et OQ, c'est-à-dire en posant $\frac{OP'}{OP} = a$, $\frac{OQ'}{OQ} = b$, nous aurons

$$\frac{NP}{M'P'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{1}{a}, \quad \frac{MP}{M'P'} = \frac{OQ}{OQ'} = \frac{1}{b},$$

et, par conséquent,

$$\frac{NP}{MP} = \frac{b}{a}.$$

Ainsi déjà, M se déplaçant sur une figure infiniment petite tracée autour du point O, on obtiendra le lieu décrit par N, en faisant tourner cette figure d'un certain angle autour de OP, puis en la projetant orthogonalement sur le plan tangent en O. D'autre part, on a

$$\frac{OM'}{ON} = \frac{OP'}{OP} = a,$$

de sorte que le lieu des points M' est homothétique de celui des points N; le centre d'homothétie est O, et le rapport d'homothétie a pour valeur a. La représentation de la figure infiniment petite décrite par le point M est donc bien une projection orthogonale de cette figure faite à une échelle convenable ([1]).

([1]) M. Chasles (Mémoire faisant suite à l'*Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*) distingue, dans les figures homographiques, les relations descriptives et les relations métriques. « Les relations descriptives consistent en ce que à chaque point et à chaque plan de l'une des figures correspondent, dans l'autre, un point et un plan respectivement. Les relations métriques consistent en ce que quatre points en ligne droite, dans la seconde figure, ont

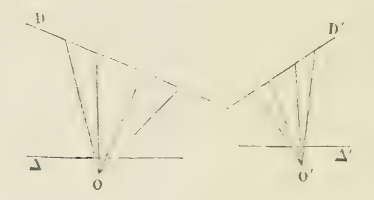
Une carte géographique quelconque, par exemple, peut être considérée comme produite par la juxtaposition des projections orthogonales de tous les éléments

---

leur rapport anharmonique égal à celui des quatre points de la première figure auxquels ils correspondent. » L'illustre géomètre ajoute d'ailleurs : « Ces relations métriques sont une conséquence des relations descriptives. » Nous allons faire voir que cela résulte immédiatement de la loi que subit la déformation dans la représentation d'une surface sur une autre.

Soient D, D′ (*fig.* 4) deux droites qui se correspondent dans deux figures homographiques; il s'agit de prouver que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de D et celui des quatre points correspondants de D′ sont égaux. Pour cela, prenons, en dehors des deux droites, deux points correspondants O et O′ dans les deux figures; joignons le premier aux quatre points de D, le second aux quatre points de D′; puis coupons respectivement les deux faisceaux ainsi obtenus

Fig. 4.



par deux transversales Δ, Δ′, infiniment rapprochées l'une de O, l'autre de O′. D'après la loi invoquée plus haut, la figure infiniment petite formée par la portion du faisceau comprise entre O′ et Δ′ peut s'obtenir en projetant orthogonalement la figure correspondante formée autour du point O, puis en modifiant, dans un rapport convenable, les dimensions de la projection ainsi obtenue. Aucune de ces deux opérations n'altère le rapport anharmonique des quatre points de Δ; or celui-ci est le même que celui des quatre points de D; celui des quatre points de Δ′ est le même que celui des quatre points de D′; donc le rapport anharmonique des quatre points de D et celui des quatre points de D′ sont égaux.

En résumé, il s'agissait de faire voir que, dans deux figures homographiques, deux faisceaux de droites correspondantes sont homographiques; or c'est ce qui a lieu, puisque, d'après la loi de déformation. l'un est une projection orthogonale de l'autre.

superficiels de la contrée, pourvu que l'on fasse varier de l'un à l'autre, et l'échelle de réduction et la position de l'élément par rapport au plan de la carte.

Tangentes principales.

4. De tous les angles droits qui sont formés par des tangentes issues du point O (*fig.* 3), ceux des lignes OP, OQ et de leurs prolongements sont les seuls dont un côté reste parallèle au plan tangent après la rotation qui a été indiquée tout à l'heure; ce sont donc aussi les seuls qui se projettent suivant des angles droits. Nous pouvons d'après cela compléter le lemme qui a été établi au commencement du troisième paragraphe et énoncer la propriété suivante:

En chaque point de la surface que l'on veut représenter, il y a deux tangentes perpendiculaires entre elles, et, si les angles ne sont pas conservés, il n'y en a que deux, telles que celles qui leur correspondent sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. De sorte que, *sur chacune des deux surfaces, il existe un système de trajectoires orthogonales, et, si le mode de représentation ne conserve pas les angles, il en existe un seul dont les projections sur l'autre surface sont aussi orthogonales.*

Nous appellerons *première* et *seconde tangente principale* les deux tangentes perpendiculaires entre elles dont l'angle n'est pas altéré par la représentation. Nous continuerons à désigner respectivement par a et b les rapports de longueurs suivant les directions de ces tangentes, et nous supposerons que a est le plus grand des deux.

Ellipse indicatrice.

5. Si la courbe infiniment petite tracée autour du point O est une circonférence dont il occupe le centre, la représentation de cette courbe sera une ellipse dont les axes se trouveront sur les tangentes principales et auront pour demi-longueurs a et b, le rayon de la circonférence étant pris pour unité. Cette ellipse constitue en chaque point une sorte d'*indicatrice* du système de projection [1].

---

(1) Imaginons que l'on effectue deux décompositions de l'espace en parallélépipèdes infiniment petits, chacune au moyen de trois séries de surfaces, et faisons correspondre les surfaces qui opèrent l'une respectivement à celles qui opèrent l'autre. Dans la représentation ainsi obtenue, la loi de la déformation sera la suivante :

Toute sphère infiniment petite est remplacée par un ellipsoïde.

Soient en effet O et O' deux points correspondants, M un point infiniment voisin de O, M' la projection de M. Considérons trois axes ox, oy, oz perpendiculaires entre eux et les directions correspondantes $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$; soient x, y, z les coordonnées de M par rapport à ox, oy, oz ; soient x', y', z' celles de M' par rapport à $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$. Prenons la distance OM pour unité, et appelons g, h, k les rapports de longueurs, suivant ox, oy, oz ; nous aurons

$$x' = gx, \quad y' = hy, \quad z' = kz.$$

D'ailleurs l'équation de la sphère qui a pour centre le point O et pour rayon OM est

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Le lieu des projections des divers points de cette sphère sera donc fourni par l'équation

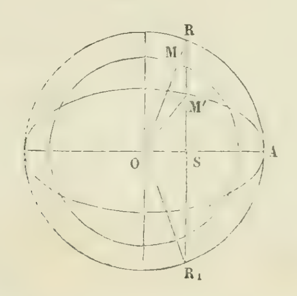
$$\frac{x'^2}{g^2} + \frac{y'^2}{h^2} + \frac{z'^2}{k^2} = 1,$$

qui représente un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués.

Les plans principaux et les axes de l'ellipsoïde fourniront ici des propriétés analogues à celles des tangentes principales dans la représentation d'une surface sur une autre, et il serait facile d'établir les formules nécessaires à l'étude de la déformation autour de chaque point.

Au lieu de projeter orthogonalement la circonférence lieu des points M (*fig.* 3), ce qui donne l'ellipse lieu des points N, puis d'agrandir celle-ci dans le rapport de a à l'unité, ce qui donne le lieu des points M′, on peut effectuer les deux opérations dans l'ordre inverse. On obtiendra donc le point M′ (*fig.* 5) de l'ellipse indicatrice qui correspond à un point donné M du cercle, en prolongeant le rayon OM jusqu'à sa rencontre en R avec la circonférence décrite sur le grand axe comme diamètre, en abaissant du point d'intersection R une perpendiculaire RS sur la direction OA du grand axe, puis réduisant cette perpendiculaire, à partir de son

Fig. 5.



pied S, dans le rapport de b à a; l'extrémité M′ de la portion SM′ ainsi obtenue sera le point cherché.

Altérations d'angles.

6. Tirons OM′ (*fig.* 5), et appelons respectivement u, u' les angles AOM, AOM′ qui se correspondent sur les deux surfaces. Comme le second est le plus petit des deux, on voit que la représentation diminue tous les angles aigus dont l'un des côtés coïncide avec la première tangente principale. Entre u et u', on a d'ailleurs

la relation

$$\tang u' = \frac{b}{a} \tang u.$$

7. Prolongeons la ligne RS d'une longueur égale à elle-même au-dessous de OA, et joignons le point O à l'extrémité R_1 du prolongement. Les deux triangles ORM', OR_1M' donnent

$$\sin(u - u') = \frac{a - b}{a + b} \sin(u + u').$$

L'angle u augmentant de zéro à $\frac{\pi}{2}$, son altération $u - u'$ augmente de zéro jusqu'à une certaine valeur ω, puis diminue jusqu'à zéro. Le *maximum* se produit au moment où la somme $u + u'$ devient égale à $\frac{\pi}{2}$. Soient U et U' les valeurs correspondantes de u et de u'; comme elles doivent satisfaire à l'équation du n° 6, on aura

$$\tang U = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \tang U' = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

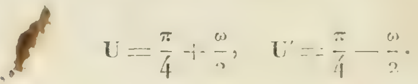
Quant à ω, on peut le calculer par l'une des formules

$$\sin\omega = \frac{a - b}{a + b}, \quad \cos\omega = \frac{2\sqrt{ab}}{a + b},$$

$$\tang\omega = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}}, \quad \tang\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

$$\tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \tang\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\frac{b}{a}},$$

dont les deux dernières proviennent de ce que, la somme de U et de U' étant égale à $\frac{\pi}{2}$ et leur différence à ω, on a



$$U = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, \quad U' = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}.$$

8. Pour que l'équation du n° 6 reste satisfaite quand on y change u en $\frac{\pi}{2} - u'$, il suffit d'y remplacer u' par $\frac{\pi}{2} - u$. Les mêmes substitutions, effectuées dans $u + u'$, donnent pour résultat $\pi - (u + u')$, de sorte que la première formule du n° 7 fait retomber sur la même valeur de l'altération. Ainsi, des deux angles qui se trouvent modifiés de quantités égales, chacun est le complément de la projection de l'autre.

9. Si l'on veut calculer directement l'altération éprouvée par l'angle donné u, on se servira de l'une des deux formules

$$\operatorname{tang}(u - u') = \frac{(a - b)\operatorname{tang} u}{a + b \operatorname{tang}^2 u},$$

$$\operatorname{tang}(u - u') = \frac{(a - b)\sin 2u}{a + b + (a - b)\cos 2u},$$

qui se déduisent immédiatement de l'équation du n° 6.

10. Considérons maintenant un angle MON (*fig.* 6 et 7) qui n'ait pour côtés ni l'une ni l'autre des tan-

Fig. 6.

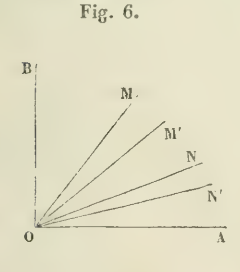
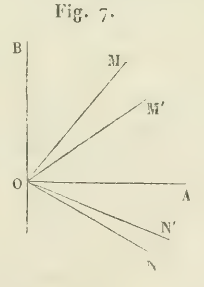


Fig. 7.



gentes principales OA, OB. Nous pouvons supposer les deux directions OM, ON à droite de OB, et l'une d'elles OM au-dessus de OA. Suivant que l'autre, ON, sera au-dessus de OA (*fig.* 6), ou au-dessous (*fig.* 7), on calcu-

lera l'angle correspondant M′ON′ en faisant la somme ou la différence des angles AOM′, AON′, lesquels seront donnés par la formule du nº 6. L'altération MON — M′ON′ sera aussi, dans le premier cas, la différence, et, dans le second, la somme des altérations éprouvées par les angles AOM, AON.

11. Quand l'angle AON (*fig.* 6) est égal à BOM′, on sait que son altération est la même que celle de l'angle AOM, de sorte que l'angle MON se trouve alors reproduit en vraie grandeur par l'angle M′ON′. Ainsi, à toute direction donnée, on peut en accoupler une autre, et une seule, telle que leur angle se conserve en projection. Cependant la seconde direction se confond avec la première lorsque celle-ci fait avec OA l'angle que nous avons désigné par U.

12. L'angle le plus altéré est celui que forme cette dernière direction avec sa symétrique par rapport à OA; il se trouve remplacé, sur la projection, par son supplément. Le *maximum* d'altération ainsi produit est égal à 2ω. Il ne peut jamais se rapporter à deux directions perpendiculaires entre elles.

Altérations de longueurs.

13. La longueur OM (*fig.* 5) ayant été prise pour unité, le rapport de longueurs suivant la direction OM est mesuré par OM′. Désignons par r ce rapport; nous pourrons le calculer au moyen de l'une des formules

$$r\cos u' = a\cos u, \quad r\sin u' = b\sin u, \quad r^2 = a^2\cos^2 u + b^2\sin^2 u.$$

On a aussi, entre r, u et l'altération $u - u'$ de l'angle u, la relation

$$2r\sin(u - u') = (a - b)\sin 2u.$$

qui exprime que, dans le triangle ORM′, les sinus de deux des angles sont entre eux comme les côtés opposés.

14. Le *maximum* et le *minimum* de r correspondent aux tangentes principales, et sont respectivement a et b.

15. Appelons r et r_1 les rapports de longueurs suivant deux directions perpendiculaires entre elles, et soit θ l'altération qu'éprouve l'angle droit formé par ces deux directions. Il est facile de voir que l'on aura

$$r^2 + r_1^2 = a^2 + b^2, \quad rr_1 \cos\theta = ab,$$

ainsi que cela résulte d'ailleurs des propriétés des diamètres conjugués dans l'ellipse.

16. Pour tous les angles non modifiés par la représentation, le produit des rapports de longueurs suivant leurs côtés est le même.

En effet, soient OA (*fig.* 6) et OB les deux tangentes principales; soient MON un angle quelconque et M′ON′ sa projection. Désignons respectivement par r et r_2 les rapports de longueurs suivant OM et ON, par u et u' les angles AOM et AOM′, il viendra

$$r \cos u' = a \cos u, \quad r_2 \sin \mathrm{AON}' = b \sin \mathrm{AON};$$

mais on sait que, si l'altération MON — M′ON′ est nulle, l'angle AON est le complément de u', et l'angle AON′ celui de u, de sorte que la seconde équation donne

$$r_2 \cos u = b \cos u'.$$

En multipliant celle-ci et la première membre à membre, on obtient

$$rr_2 = ab,$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

17. Il résulte de cette propriété que les rapports de longueurs suivant les deux directions dont l'angle subit l'altération *maxima* est égal à $\sqrt{ab}$; car l'angle non altéré qui a pour côté l'une de ces deux lignes se réduit à zéro, et a la même ligne pour second côté (nº 11).

Altérations de surfaces.

18. Le rapport dans lequel un élément superficiel se trouve modifié par la représentation n'est autre que celui du rectangle OP'M'Q' (*fig.* 3) au rectangle OPMQ, ou encore celui de l'aire de l'ellipse indicatrice à l'aire du cercle; il est donc égal à ab.

19. Lorsque les deux aires sont équivalentes, on a

$$b = \frac{1}{a}, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right),$$

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \frac{a-1}{a+1}, \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) = a.$$

Les deux éléments linéaires dont l'angle est le plus altéré conservent alors leurs longueurs.

Détermination des axes de l'ellipse indicatrice.

20. Pour appliquer les formules ci-dessus à l'étude de la déformation produite autour de chaque point par un mode de projection suffisamment défini, il faut au préalable déterminer les longueurs et les directions des axes de l'ellipse indicatrice.

Supposons les deux surfaces rapportées à un même système ou à deux systèmes d'axes perpendiculaires entre eux; soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'une, x', y', z' celles du point correspondant de l'autre, l et m deux paramètres variables.

On peut définir le mode de représentation en égalant les six coordonnées à des fonctions convenablement choisies de l et de m. Pour chaque couple de valeurs attribuées aux deux paramètres, on obtiendra un point de la première surface et la projection de ce point. Pour chaque valeur attribuée à un seul des paramètres, l'autre restant variable, on obtiendra une courbe du premier canevas et la courbe correspondante du second. Si l'on pose

$$\mathrm{L}=\left[\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2+\left(\frac{dz}{dl}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{L}'=\left[\left(\frac{dx'}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dl}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dl}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{M}=\left[\left(\frac{dx}{dm}\right)^2+\left(\frac{dy}{dm}\right)^2+\left(\frac{dz}{dm}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{M}'=\left[\left(\frac{dx'}{dm}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dm}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dm}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

les longueurs des côtés de deux parallélogrammes infiniment petits se correspondant sur les deux canevas seront, pour l'un, $\mathrm{L}dl$ et $\mathrm{M}dm$, pour l'autre, $\mathrm{L}'dl$ et $\mathrm{M}'dm$. En appelant h et k les rapports de ces côtés, Θ et Θ' leurs angles, on aura

$$h=\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}},\quad k=\frac{\mathrm{M}'}{\mathrm{M}},$$

$$\cos\Theta=\frac{1}{\mathrm{LM}}\left[\left(\frac{dx}{dl}\right)\left(\frac{dx}{dm}\right)+\left(\frac{dy}{dl}\right)\left(\frac{dy}{dm}\right)+\left(\frac{dz}{dl}\right)\left(\frac{dz}{dm}\right)\right],$$

$$\cos\Theta'=\frac{1}{\mathrm{L}'\,\mathrm{M}'}\left[\left(\frac{dx'}{dl}\right)\left(\frac{dx'}{dm}\right)+\left(\frac{dy'}{dl}\right)\left(\frac{dy'}{dm}\right)+\left(\frac{dz'}{dl}\right)\left(\frac{dz'}{dm}\right)\right],$$

de sorte que h, k, Θ et Θ' sont connus en fonction de l et de m.

Dans un grand nombre d'applications, notamment dans celles qui auront pour objet les cartes géographiques, il sera inutile d'exprimer les six coordonnées

rectangulaires en fonction de l et de m, et la nature des surfaces ainsi que celle du mode de projection permettront de remplacer les formules qui précèdent par d'autres plus simples. En tout cas, nous pouvons maintenant considérer comme donnés, pour chaque point de la première surface, les deux angles adjacents supplémentaires, Θ, $\pi - \Theta$, de deux éléments linéaires, leurs projections, Θ', $\pi - \Theta'$, et les rapports de longueurs, h, k, suivant les directions de ces éléments.

21. Des deux angles donnés, l'un est traversé par la première tangente principale; nous verrons plus loin comment on peut le distinguer de l'autre; c'est lui que nous désignerons par Θ; appelons u et v les deux parties dans lesquelles il se trouve ainsi décomposé, u étant celle des deux qui est formée par la tangente principale et la direction suivant laquelle le rapport de longueurs est h; soient u' et v' les portions correspondantes de Θ'. Si, pour fixer les idées, nous supposons $h > k$, l'angle u sera nécessairement aigu et même plus petit que v et que $\pi - v$; quant à v, il pourra être aigu ou obtus. D'après les formules du n° 12, on a

$$u + v = \Theta, \quad a \cos u = h \cos u', \quad a \cos v = k \cos v',$$
$$u' + v' = \Theta', \quad b \sin u = h \sin u', \quad b \sin v = k \sin v';$$

d'où l'on déduit

$$ab \sin\Theta = hk \sin\Theta',$$
$$(a^2 + b^2) \sin^2\Theta = h^2 + k^2 - 2hk \cos\Theta \cos\Theta',$$

ou bien encore

$$(a + b)^2 \sin^2\Theta = h^2 + k^2 - 2hk \cos(\Theta + \Theta'),$$
$$(a - b)^2 \sin^2\Theta = h^2 + k^2 - 2hk \cos(\Theta - \Theta').$$

Ces équations ne changent pas lorsqu'on y remplace à la fois Θ par $\pi - \Theta$, et Θ' par $\pi - \Theta'$; elles fourniront

donc a et b sans qu'il soit besoin de savoir quel est celui des deux angles donnés à l'intérieur duquel passe la première tangente principale. Il vient ensuite, pour le calcul de u et de v,

$$\sin u = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{a^2 - b^2}}, \quad \sin v = \sqrt{\frac{a^2 - k^2}{a^2 - b^2}},$$

$$\cos u = \sqrt{\frac{h^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \quad \cos v = \pm\sqrt{\frac{k^2 - b^2}{a^2 - b^2}},$$

$$\tang u = \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{h^2 - b^2}}, \quad \tang v = \pm\sqrt{\frac{a^2 - k^2}{k^2 - b^2}}.$$

Pour déterminer complétement la direction de la première tangente principale, il reste encore à choisir, relativement à Θ, entre deux angles supplémentaires donnés, et, relativement à v, entre deux valeurs supplémentaires fournies par les trois dernières formules. On lèvera immédiatement toute indécision en cherchant quelle est celle de ces deux valeurs qui, ajoutée à u, produit une somme égale à l'un des deux angles donnés; en effet, l'équation $u + v = \Theta$ est incompatible avec chacune de celles que l'on formerait en y remplaçant soit Θ par $\pi - \Theta$, soit v par $\pi - v$, soit en même temps Θ par $\pi - \Theta$ et v par $\pi - v$, à moins cependant que l'on n'ait $\Theta = \frac{\pi}{2}$, ou $v = \frac{\pi}{2}$, ou $u = 0$; mais ces trois cas particuliers, qui ne comportent d'ailleurs aucune incertitude, se trouvent parmi ceux que nous allons examiner. Remarquons encore que, si v est obtus, Θ sera à plus forte raison obtus, et que, si v est aigu, Θ sera aigu ou obtus, suivant que $a^2 + b^2$ se trouvera plus petit ou plus grand que $h^2 + k^2$.

22. Lorsque les deux angles supplémentaires qui sont donnés sur la première surface n'éprouvent pas d'altéra-

tion, c'est-à-dire pour $\Theta' = \Theta$, les équations qui fournissent les demi-axes de l'ellipse indicatrice se réduisent à

$$ab = hk, \quad (a - b)\sin\Theta = h - k.$$

Lorsque les mêmes angles se changent l'un dans l'autre par l'effet de la représentation, c'est-à-dire pour $\Theta' = \pi - \Theta$, les équations deviennent

$$ab = hk, \quad (a + b)\sin\Theta = h + k.$$

Quand les angles sont droits, c'est-à-dire pour $\Theta = \frac{\pi}{2}$, les formules générales se ramènent à celles qui expriment les propriétés des diamètres conjugués dans l'ellipse indicatrice. Alors u et v sont complémentaires, et la première tangente principale se dirige à l'intérieur de celui des deux angles droits donnés qui a pour projection un angle aigu.

Quand les rapports de longueurs suivant les directions des deux éléments linéaires sont égaux, c'est-à-dire pour $h = k$, on a

$$a = h\,\frac{\cos\frac{\Theta'}{2}}{\cos\frac{\Theta}{2}}, \quad b = h\,\frac{\sin\frac{\Theta'}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}};$$

la première tangente principale est bissectrice de celui des deux angles donnés qui se trouve diminué en projection.

Si les mêmes rapports sont liés à Θ et à Θ' par la relation

$$h\cos\Theta = k\cos\Theta',$$

il viendra

$$a = h, \quad b = k\,\frac{\sin\Theta'}{\sin\Theta},$$

et la première tangente principale coïncidera avec la direction suivant laquelle le rapport de longueur est h.

Si les données satisfont à la condition

$$h\cos\Theta' = k\cos\Theta,$$

il viendra

$$a = h\frac{\sin\Theta'}{\sin\Theta}, \quad b = k,$$

et la première tangente principale sera perpendiculaire à la direction suivant laquelle le rapport des longueurs est k. (*A suivre.*)

SUR LES NORMALES AUX SURFACES DU SECOND ORDRE ;

PAR M. LAGUERRE.

1. Étant donnés une surface du second ordre K ayant pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0,$$

et un point M ayant pour coordonnées α, β, γ, on sait que l'on peut de ce point mener six normales à la surface, les pieds de ces normales étant déterminés par les équations

$$x = \frac{a\alpha}{a-\rho}, \quad y = \frac{b\beta}{b-\rho}, \quad z = \frac{c\gamma}{c-\rho},$$

où ρ est une des racines de l'équation

$$(1) \qquad \frac{a\alpha^2}{(a-\rho)^2} + \frac{b\beta^2}{(b-\rho)^2} + \frac{c\gamma^2}{(c-\rho)^2} - 1 = 0.$$

Ces six points sont d'ailleurs déterminés par l'inter-

section de K avec la cubique gauche H, définie par les équations

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) xy + \frac{\alpha y}{b} - \frac{\beta x}{a} = 0, \quad \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) yz + \frac{\beta z}{c} - \frac{\gamma y}{b} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right) zx + \frac{\gamma x}{a} - \frac{\alpha z}{c} = 0.$$

Cela posé, déterminons les quantités ξ, η, ζ, P, Q, R, X, Y, Z et G, de telle sorte que l'on ait identiquement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{x\xi}{a}+\frac{y\eta}{b}+\frac{z\zeta}{c}-1\right) \\ &\quad\times(x^2+y^2+z^2-2Xx-2Yy-2Zz+G) \\ &\quad=(x\xi+y\eta+z\zeta+G)\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}-1\right), \\ &\qquad+\left(y\xi-x\eta+R\right)\left[\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)xy+\frac{\alpha y}{b}-\frac{\beta x}{a}\right], \\ &\qquad+\left(z\eta-y\zeta+P\right)\left[\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)yz+\frac{\beta z}{c}-\frac{\gamma y}{b}\right], \\ &\qquad+\left(x\zeta-z\xi+Q\right)\left[\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)zx+\frac{\gamma x}{a}-\frac{\alpha z}{c}\right]. \end{aligned}\right.$$

On aura, entre ces dix quantités, les neuf relations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &2X\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=-(G+a), \\ &2Y\eta+\gamma\zeta+\alpha\xi=-(G+b), \\ &2Z\zeta+\alpha\xi+\beta\eta=-(G+c); \end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &R\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{(2X-\alpha)\eta}{b}+\frac{(2Y-\beta)\xi}{a}, \\ &P\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{(2Y-\beta)\zeta}{c}+\frac{(2Z-\gamma)\eta}{b}, \\ &Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=\frac{(2Z-\gamma)\xi}{a}+\frac{(2X-\alpha)\zeta}{c}; \end{aligned}\right.$$

et

$$(5) \quad \begin{cases} Q\gamma - R\beta = 2aX + (G + a)\xi, \\ R\alpha - P\gamma = 2bY + (G + b)\eta, \\ P\beta - Q\alpha = 2cZ + (G + c)\zeta. \end{cases}$$

Comme nous disposons de dix quantités indéterminées pour satisfaire à ces neuf relations, on pourra y satisfaire d'une infinité de manières.

Considérons maintenant l'équation (2), elle exprime évidemment que, des six pieds des normales que l'on peut abaisser du point M, quatre sont situés sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Xx - 2Yy - 2Zz + G = 0$$

et les deux autres dans le plan

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0,$$

dont le pôle, par rapport à la surface du second ordre K, a pour coordonnées ξ, η, ζ; et, comme ces quantités renferment un paramètre arbitraire, elles sont les coordonnées d'un point quelconque de la polaire, par rapport à K, de la corde qui joint les pieds des deux dernières normales dont je viens de parler.

2. Désignons par S la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Xx - 2Yy - 2Zz + G = 0;$$

les coordonnées de son centre sont évidemment X, Y, Z et G est la puissance de l'origine relativement à cette sphère. Elle contient, comme je l'ai dit, quatre des pieds des normales que l'on peut abaisser du point M. Soient D la corde qui joint les pieds des deux autres normales et Δ sa polaire réciproque par rapport à K. D'après une dénomination généralement adoptée, Δ est un *axe* re-

lativement à K et aux surfaces du second ordre, qui forment avec elles un système homofocal; en d'autres termes, les deux droites D et Δ sont perpendiculaires entre elles.

De ce que j'ai dit plus haut il résulte que, si l'on considère ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes, la droite Δ est précisément déterminée par les équations (3), ou encore, si l'on pose, pour abréger,

$$(6)\qquad 2X = \alpha + A, \quad 2Y = \beta + B, \quad 2Z = \gamma + C,$$

par les suivantes :

$$(7)\qquad A\xi + a = B\eta + b = C\zeta + c = \lambda,$$

avec la relation

$$(8)\qquad G + \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = -\lambda.$$

3. Tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons-les dans (8), en égalant à zéro le terme constant et le coefficient de λ, il viendra

$$(9)\qquad \frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\gamma}{C} + 1 = 0$$

et

$$(10)\qquad G = \frac{\alpha a}{A} + \frac{\beta b}{B} + \frac{\gamma c}{C}.$$

Soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points où D rencontre la surface du second ordre K, le plan tangent en ce point contient Δ, et son équation est

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0.$$

Remplaçant, dans cette équation, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), il vient, en égalant à zéro, le terme

constant et le coefficient de λ

$$(11)\qquad \frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+1=0$$

et

$$(12)\qquad \frac{x}{aA}+\frac{y}{bB}+\frac{z}{cC}=0.$$

L'équation (12) est celle du plan diamétral contenant la corde D; le plan, déterminé par l'équation (11), contient le point M en vertu de la relation (9); c'est donc le plan qui passe par les deux normales dont les pieds sont situés sur D; je le désignerai par P.

4. En général, pour abréger le discours, étant donné un plan quelconque ayant pour équation

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}+1=0,$$

j'appellerai *centre* de ce plan le point dont les coordonnées sont p, q, r et *foyer* de ce plan le point où se coupent les deux normales à K qui sont contenues dans ce plan. On voit que le plan P, dont j'ai parlé plus haut, a pour foyer le point M et pour centre le point m dont les coordonnées sont A, B, C.

La notion de *centre d'un plan* se présente fréquemment dans la théorie des normales aux surfaces du second ordre, et, à ce sujet, je rappellerai une élégante proposition due à Joachimsthal :

Étant donnés, sur une surface du second ordre, trois points a, b, c, tels que les normales en ces points concourent en un même point M, *le pôle du plan abc, relativement à cette surface, est le centre, relativement aux trois axes de la surface, du plan qui passe par les*

pieds des trois autres normales que l'on peut encore abaisser du point M (*).

5. En adoptant les dénominations qui précèdent, il résulte immédiatement des équations (6) que le centre N de la sphère S est le point milieu du segment Mm.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales que l'on peut abaisser, d'un point donné M, *sur une surface du second ordre* K, *est le milieu du segment qui joint le point* M *au centre du plan qui contient les deux autres normales.*

6. Pour déterminer complétement la sphère S, dont on peut construire le centre au moyen de la proposition précédente, il suffit de connaître la puissance G de l'origine relativement à cette sphère, ou bien encore de connaître la sphère Σ, dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 + G = 0.$$

Cette sphère Σ peut être facilement déterminée en s'appuyant sur la propriété suivante :

Le point M *et le pôle du plan* P, *relativement à la surface du second ordre* K, *sont deux points conjugués relativement à la sphère* Σ, *en d'autres termes le plan polaire de chacun d'eux, relativement à* Σ, *contient l'autre point.*

Pour démontrer cette propriété, je remarque que le

(*) Joachimsthal, *De quibusdam æquationibus quarti et sexti gradus quæ in theoria linearum et superficierum secundi gradus occurrunt* (*Journal de Crelle*, t. LIII, p. 172).

pôle du plan P, relativement à K, a pour coordonnées

$$-\frac{a}{A}; \quad -\frac{b}{B}; \quad -\frac{c}{C};$$

le plan polaire de ce pôle, relativement à Σ, a pour équation

$$\frac{ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} - G = 0,$$

et, en vertu de la relation (10), il contient évidemment le point α, β, γ; ce qui démontre la proposition énoncée.

7. La cubique gauche H rencontre la sphère S, d'abord aux quatre points où les normales concourent en M, puis en deux autres points. Je dirai, pour abréger, que la corde qui joint ces deux derniers points est la *corde supplémentaire* de D.

L'examen de l'équation (2) montre immédiatement que la corde supplémentaire est constamment comprise dans le plan

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0,$$

où ξ, η, ζ désignent les coordonnées d'un point quelconque de Δ.

Remplaçons, dans l'équation précédente, ξ, η, ζ par leurs valeurs tirées de (7), et égalons à zéro le terme constant ainsi que le coefficient de λ; nous aurons les équations suivantes, qui définissent la corde supplémentaire :

$$\frac{ax}{A} + \frac{by}{B} + \frac{cz}{C} - G = 0, \tag{13}$$

et

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 0. \tag{14}$$

L'équation (14) montre que le plan diamétral passant par la corde supplémentaire est parallèle au plan P. D'où la proposition suivante :

Les six pieds des normales, que l'on peut d'un point M *abaisser sur une surface du second ordre, sont, ainsi que le point* M *et le centre* O *de la surface, situés sur une même cubique gauche* H.

Si, par le point O, *on mène un plan parallèle au plan qui contient* M *et les pieds de deux quelconques des normales, ce plan coupe la cubique en deux autres points. Ces deux points et les pieds des quatre autres normales sont situés sur une même sphère.*

8. En désignant par ξ, η, ζ des constantes arbitraires, le pôle du plan

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} = 1,$$

relativement à K, est le point (ξ, η, ζ), dont le plan polaire, relativement à Σ, a pour équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0,$$

Il résulte d'ailleurs de ce que j'ai dit plus haut que, si le plan

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} + \frac{z\zeta}{c} - 1 = 0,$$

tourne autour de la corde D, le plan

$$x\xi + y\eta + z\zeta + G = 0$$

tourne autour de la corde supplémentaire.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La droite Δ *et la corde supplémentaire de* D *sont polaires réciproques, relativement à la sphère* Σ.

9. Comme, dans la théorie des normales à une surface du second ordre, on a souvent à considérer les centres de divers plans (ces centres étant déterminés relativement aux axes de la surface), il n'est pas inutile d'entrer dans quelques détails relativement aux propriétés de ces points.

En premier lieu, soit, ρ désignant un paramètre variable,

$$(a+\rho a')x+(b+\rho b')y+(c+\rho c')z+d+\rho d'=0$$

l'équation d'un plan tournant d'une droite fixe.

Pour trouver le lieu décrit par le centre de ce plan, identifions son équation avec l'équation

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}+1=0;$$

il viendra

$$A=\frac{d+\rho d'}{a+\rho a'},\quad B=\frac{d+\rho d'}{b+\rho b'},\quad C=\frac{d+\rho d'}{c+\rho c'},$$

d'où l'on voit que le centre décrit une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ formé par les plans principaux et le plan à l'infini.

D'où les propositions suivantes :

Le lieu des centres des plans, qui passent par une droite fixe, est une cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ; et réciproquement :

Si une cubique gauche passe par les sommets du tétraèdre Θ, *les plans, dont ses divers points sont les centres, passent par une droite fixe.*

En second lieu, considérons une droite quelconque dont un des points soit déterminé par les équations

$$x=\frac{a+\rho a'}{d+\rho d'},\quad y=\frac{b+\rho b'}{d+\rho d'},\quad z=\frac{c+\rho c'}{d+\rho d'}.$$

Le plan ayant pour centre ce point a pour équation

$$\frac{x}{a+\rho a'}+\frac{y}{b+\rho b'}+\frac{z}{c+\rho c'}+\frac{1}{d+\rho d'}=0,$$

et il est clair que, quand on fait varier ρ, il enveloppe une cubique gauche ayant pour plans osculateurs les plans qui forment les faces du tétraèdre Θ.

D'où les propositions suivantes :

Les plans, qui ont pour centres les différents points d'une droite, enveloppent une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ (*); et réciproquement:

Si une cubique gauche est inscrite dans le tétraèdre Θ, *le lieu des centres de ses divers plans osculateurs est une ligne droite.*

Je m'appuierai maintenant sur le lemme qui suit :

LEMME. — *Si les sommets des deux tétraèdres sont situés sur une même cubique gauche, les huit faces de ces tétraèdres sont les plans osculateurs d'une autre cubique gauche.*

Réciproquement, *si les huit faces de deux tétraèdres sont les plans osculateurs d'une même cubique gauche, leurs huit sommets sont situés sur une autre cubique gauche.*

Il suffit évidemment de démontrer la première partie de ce lemme, la seconde proposition étant corrélative de la première.

Pour la démontrer, je remarque que la cubique, qui contient les sommets des deux tétraèdres, étant une *courbe unicursale,* je puis supposer que les sommets du

---

(*) J'entends par cubique gauche inscrite dans un tétraèdre une cubique ayant pour plans osculateurs les faces de ce tétraèdre.

premier tétraèdre soient déterminés par les racines d'une équation du quatrième degré $f(x) = 0$, et les sommets du second par les racines d'une équation de même degré $F(x) = 0$.

Cela posé, on voit que les racines de l'équation

$$F(x) + \lambda f(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre variable, déterminent sur la cubique les sommets d'une suite de tétraèdres, chaque point de la courbe étant d'ailleurs le sommet d'un seul de ces tétraèdres; d'où il résulte que les faces de tous ces tétraèdres enveloppent une cubique gauche, puisque, par chaque point de la courbe donnée, on ne peut mener que trois plans osculateurs à l'enveloppe.

En particulier, les faces des deux tétraèdres donnés sont des plans osculateurs de cette cubique gauche; la proposition est donc démontrée.

11. Considérons maintenant quatre plans dont les centres soient en ligne droite : d'après ce que j'ai démontré plus haut, les faces du tétraèdre T, déterminé par ces quatre plans, sont les plans osculateurs d'une cubique gauche inscrite dans le tétraèdre Θ. Du lemme précédent il résulte que les sommets des tétraèdres T et Θ sont situés sur une même cubique gauche et, par suite, les plans ayant pour centres les sommets du tétraèdre T passent par une même droite.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si les quatre faces d'un tétraèdre ont leurs centres en ligne droite, les plans qui ont pour centre les sommets du tétraèdre passent par une même droite.

Et de même :

Si les plans qui ont pour centres les sommets d'un

tétraèdre passent par une même droite, les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.

12. Si d'un point quelconque M de l'espace on mène les six normales à la surface du second ordre K, on sait que le point M et les six pieds des normales sont situés sur une même cubique gauche passant par les sommets du tétraèdre Θ. Désignons par p_1, p_2, p_3, ..., p_6 les pieds de ces normales.

Des considérations qui précèdent il résulte immédiatement que :

Si l'on forme un tétraèdre ayant pour sommets quatre quelconques des sept points M, $p_1, p_2, \ldots, p_6$, les centres des faces de ce tétraèdre sont en ligne droite.

13. Considérons une droite quelconque E, normale à une surface de second ordre, ayant pour axes les axes de coordonnées Ox, Oy et Oz. Le lieu des centres des plans qui passent par E est une cubique gauche L passant par les sommets du tétraèdre Θ. Soit M un point quelconque pris sur cette normale; par ce point on peut mener à la surface cinq normales distinctes de E; soient p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 leurs pieds. Désignons par N_1 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_2, p_3, p_4 et p_5, de même par N_2 le centre de la sphère qui passe par les quatre points p_1, p_3, p_4 et p_5, ... ; désignons enfin par m_1, m_2, m_3, m_4 et m_5 les centres des plans qui, passant par E, contiennent respectivement les points p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5.

D'après ce que je viens de dire, les cinq points m sont situés sur la cubique gauche L; d'ailleurs, comme je l'ai montré précédemment (n° 5), les points N sont respectivement les milieux des segments Mm.

D'où l'on déduit immédiatement les propositions suivantes :

Si d'un point M *on mène cinq normales quelconques à une surface du second ordre, ayant pour centre* O, *les cinq pieds de ces normales peuvent être regardés comme les sommets de cinq tétraèdres; les centres des cinq sphères circonscrites à ces tétraèdres sont situés sur une cubique gauche, passant par le milieu du segment* MO *et par les points situés à l'infini sur les axes de la surface.*

Étant donnés une droite quelconque E *et trois droites rectangulaires* Ox, Oy *et* Oz, *imaginons toutes les surfaces du second ordre ayant ces droites pour axes et normales à* E; *si d'un point* M, *pris arbitrairement sur* E, *on mène à l'une de ces surfaces quatre normales distinctes de* E, *le lieu du centre de la sphère circonscrite au tétraèdre, formé par les pieds des normales, est une cubique gauche passant par le milieu du segment* MO, *et par les trois points à l'infini sur les axes* Ox, Oy *et* Oz.

Il est à remarquer que, si le point M se déplace sur la droite E, la cubique gauche conserve sa forme, chacun de ces points décrivant un segment de droite parallèle à E et égal à la moitié du segment, dont le point M s'est déplacé.

14. Je ne développerai pas davantage les conséquences qu'on peut déduire des propositions précédentes, et je terminerai cette Note en établissant quelques formules qui peuvent être utiles dans les recherches sur les normales aux surfaces du second ordre.

Soient ρ' et ρ'' les deux racines de l'équation (1) qui correspondent aux deux normales dont les pieds sont

situés sur la droite D, et soit

$$F(\rho) = (\rho - \rho')(\rho - \rho'').$$

En désignant, pour un instant, par ρ l'une quelconque de ces racines, les coordonnées du pied correspondant sont

$$\frac{a\alpha}{a-\rho}, \quad \frac{b\beta}{b-\rho}, \quad \frac{c\gamma}{c-\rho},$$

l'équation du plan tangent en ce point

$$\frac{\xi\alpha}{a-\rho} + \frac{\eta\beta}{b-\rho} + \frac{\zeta\gamma}{c-\rho} = 1.$$

Ce plan contient la droite Δ; tirons de (7) les valeurs de ξ, η, ζ et portons ces valeurs dans l'équation précédente. En égalant à zéro le coefficient de λ, on obtiendra la relation

$$\frac{\alpha}{A(a-\rho)} + \frac{\beta}{B(b-\rho)} + \frac{\gamma}{C(c-\rho)} = 0,$$

et cette relation devant être satisfaite pour $\rho = \rho'$ et $\rho = \rho''$, il vient, après quelques réductions faciles,

$$F(\rho) = \rho^2 - (G + a + b + c)\rho - abc\left(\frac{\alpha}{aA} + \frac{\beta}{bB} + \frac{\gamma}{cC}\right);$$

d'où

(15) $$G = \rho' + \rho'' - a - b - c,$$

et

(16) $$\begin{cases} F(a) = (c-a)(a-b)\dfrac{\alpha}{A} = (a-\rho')(a-\rho''), \\ F(b) = (a-b)(b-c)\dfrac{\beta}{B} = (b-\rho')(b-\rho''), \\ F(c) = (b-c)(c-a)\dfrac{\gamma}{C} = (c-\rho')(c-\rho''). \end{cases}$$

Puisque ρ'' satisfait à l'équation (1), on a identiquement

$$\frac{a\alpha^2(a-\rho')^2}{(a-\rho')^2(a-\rho'')^2}+\frac{b\beta^2(b-\rho')^2}{(b-\rho')^2(b-\rho'')^2}+\frac{c\gamma^2(c-\rho')^2}{(c-\rho')^2(c-\rho'')^2}=1;$$

d'où, en remplaçant les dénominateurs par leurs valeurs tirées de (16) et ρ' par ρ,

$$\frac{a\mathrm{A}^2}{(a-b)^2(c-a)^2}(a-\rho)^2+\frac{b\mathrm{B}^2}{(b-c)^2(a-b)^2}(b-\rho)^2+\frac{c\mathrm{C}^2}{(c-a)^2(b-c)^2}(c-\rho)^2-1=0.$$

Cette équation devant être satisfaite pour $\rho=\rho'$ et $\rho=\rho''$, on en déduit cette nouvelle expression du polynôme $\mathrm{F}(\rho)$,

$$\mathrm{F}(\rho)=\frac{\left[\begin{array}{l}a(b-c)^2\mathrm{A}^2(a-\rho)^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2(b-\rho)^2\\ \qquad+c(a-b)^2\mathrm{B}^2(c-\rho)^2-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\end{array}\right]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b)^2\mathrm{C}^2}.$$

D'où, en vertu des équations (16), les relations suivantes qui déterminent les coordonnées α, β, γ du foyer du plan :

$$\frac{x}{\mathrm{A}}+\frac{y}{\mathrm{B}}+\frac{z}{\mathrm{C}}+1=0,$$

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\alpha}{\mathrm{A}}&=\frac{(c-a)(a-b)[b\mathrm{B}^2+c\mathrm{C}^2-(b-c)^2]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b)^2\mathrm{C}^2},\\ \frac{\beta}{\mathrm{B}}&=\frac{(a-b)(b-c)[c\mathrm{C}^2+a\mathrm{A}^2-(c-a)^2]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b)^2\mathrm{C}^2},\\ \frac{\gamma}{\mathrm{C}}&=\frac{(b-c)(c-a)[a\mathrm{A}^2+b\mathrm{B}^2-(a-b)^2]}{a(b-c)^2\mathrm{A}^2+b(c-a)^2\mathrm{B}^2+c(a-b)^2\mathrm{C}^2};\end{aligned}\right.$$

et auxquelles on peut joindre la relation

$$(18)\quad G = \frac{\left[\begin{array}{r} a(a-b-c)(b-c)^2A^2 + b(b-c-a)(c-a)^2B^2 \\ + c(c-a-b)(a-b)^2C^2 \end{array}\right]}{a(b-c)^2A^2 + b(c-a)^2B^2 + c(a-b)^2C^2}.$$

PARTICULARITÉS RELATIVES A L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

Par M. S. REALIS.

Étant donnée l'équation à coefficients entiers

$$x^3 + Px + Q = 0,$$

on en désigne les trois racines par a, b, c, et l'on fait, pour abréger,

$$P^2 - 4Qx = \varphi(x).$$

Cela posé, la considération de la fonction $\varphi(x)$ conduit aux propositions suivantes, faciles à démontrer :

1° Si a est racine entière de l'équation proposée, la quantité $\varphi(a)$ est égale à un carré : le produit $\varphi(b)\,\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant à la forme $5u^2 - v^2$ et à la forme équivalente $u^2 - 5v^2$.

2° Si les trois racines de l'équation sont entières, la quantité $\varphi(a)$, où a désigne l'une quelconque d'entre elles, est le carré d'un nombre compris dans les deux formes indiquées. En ce cas, si les racines b, c sont de même parité, le produit $\varphi(b)\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant en outre à l'une des formes $u^2 - 16v^2$, $16u^2 - v^2$.

3° La racine a étant entière, et b, c étant exprimées

par des nombres complexes entiers (*), $\varphi(a)$ est le carré d'un nombre de la forme $5u^2 + v^2$: le produit $\varphi(b)\varphi(c)$ est le carré d'un nombre appartenant en même temps aux formes $5u^2 + v^2$, $5u^2 - v^2$, $u^2 - 5v^2$, $u^2 + 16v^2$.

4° Quelle que soit la nature des trois racines a, b, c, si les coefficients P, Q sont entiers, le produit $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$ se réduit à un carré.

Si, de plus, la quantité $-(4P^3 + 27Q^2)$ est égale à un carré, le même produit est le carré d'un nombre renfermé dans les deux formes équivalentes $5u^2 - v^2$, $u^2 - 5v^2$.

Si c'est la quantité $4P^3 + 27Q^2$ qui est égale à un carré, le produit considéré est le carré d'un nombre de la forme $5u^2 + v^2$.

Remarque. — Les formules qui établissent les résultats indiqués trouvent une application utile dans certaines questions d'Analyse indéterminée. On en déduit, par exemple, l'identité

$$(5\alpha^2 - \beta^2)^2 + [5\alpha^2 - (2\alpha - \beta)^2]^2 + [5\alpha^2 - (2\alpha + \beta)^2]^2 = 3(3\alpha^2 + \beta^2)^2,$$

qui fournit une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 3z^2,$$

au moyen de valeurs de z_1, z_2, z_3 contenues dans la forme $5u^2 - v^2$, et de valeurs de z contenues dans la forme $3u^2 + v^2$.

L'identité analogue

$$[3(\alpha + \beta)^2 - (3\alpha + \beta)^2]^2 + [3(2\alpha)^2 - (3\alpha - \beta)^2]^2 + [3(\alpha - \beta)^2 - 2(\beta)^2]^2 = 6(3\alpha^2 + \beta^2)^2$$

(*) *Voir*, pour les racines complexes des équations, le tome III de la 1re série, pp. 41, 145 et 325.

ne se déduit pas directement des formules mentionnées, mais on y arrive par des considérations semblables à celles qui amènent les propositions énoncées plus haut. Elle fournit, comme on voit, une infinité de solutions entières de l'équation

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 6z^2,$$

au moyen de valeurs de z renfermées dans la forme $3u^2 + v^2$, et de valeurs de z_1, z_2, z_3 renfermées dans l'une ou l'autre des formes $3u^2 - v^2$, $u^2 - 3v^2$.

Au point de vue de la théorie des nombres, les identités précédentes constituent des théorèmes remarquables touchant la décomposition de $3z^2$ et de $6z^2$ en trois carrés, lorsque z est un nombre de la forme indiquée.

La considération de fonctions autres que $\varphi(x)$, composées de même avec les racines de l'équation du troisième degré, amène des résultats plus généraux. Nous nous bornerons à énoncer la proposition suivante :

Le nombre z étant de la forme $3u^2 + v^2$, *et le coefficient k étant une somme de trois carrés entiers, le produit* kz^2 *est la somme de trois carrés compris dans une même forme*

$$(Au^2 + Buv + Cv^2)^2,$$

où les coefficients A, B, C *sont des entiers ne dépendant que de k, et les entiers variables u, v peuvent être positifs ou négatifs.*

Une conséquence immédiate de l'identité qui justifie et complète cette proposition consiste en ce que *la somme de trois carrés entiers peut être transformée, d'une infinité de manières et au moyen de formules directes, en une somme de trois carrés rationnels.*

Il est à propos de rappeler ici, d'après Fermat et Euler, que la forme quadratique $3u^2 + v^2$ peut représenter tous les nombres premiers compris dans la forme linéaire $6n + 1$: qu'elle peut représenter, par conséquent, tous les nombres dont les facteurs premiers appartiennent à cette forme linéaire (*voir*, au t. VIII des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg,* le Mémoire d'Euler : *Supplementum quorumdam theorematum arithmeticorum,* etc. ; *voir* aussi, au t. III des *OEuvres de Lagrange,* le Mémoire intitulé : *Recherches d'Arithmétique*).

SUR LES SYSTÈMES DE DROITES QUI SONT NORMALES A UNE MÊME SURFACE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Je renverrai, pour toutes les notations dont je me servirai ici, à ma Note *Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces* (1).

Par chaque point M d'une surface S menons une droite m, dont la position soit définie par l'angle θ qu'elle fait avec la normale MZ à la surface et l'angle φ que fait avec la direction MX sa projection sur le plan tangent.

Les cosinus des angles que font, avec les axes coordonnés, les trois directions MX, MY et MZ, étant respectivement

$$\begin{matrix} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, \\ \cos\xi, & \cos\eta, & \cos\zeta, \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu, \end{matrix}$$

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XI, p. [illegible]

les cosinus des angles que fera avec les axes la droite m en seront respectivement

$$\cos\alpha\sin\theta\cos\varphi + \cos\xi\sin\theta\sin\varphi + \cos\lambda\cos\theta,$$
$$\cos\beta\sin\theta\cos\varphi + \cos\eta\sin\theta\sin\varphi + \cos\mu\cos\theta,$$
$$\cos\gamma\sin\theta\cos\varphi + \cos\rho\sin\theta\sin\varphi + \cos\nu\cos\theta;$$

et, pour que les diverses droites m soient normales à une même surface, il sera nécessaire et suffisant que l'expression

$$\Sigma dx\,(\cos\alpha\sin\theta\cos\varphi + \cos\xi\sin\theta\sin\varphi + \cos\lambda\cos\theta)$$

soit une différentielle exacte.

On a

$$dx = \mathrm{E}du\cos\alpha + \mathrm{G}dv\cos\xi,$$
$$dy = \mathrm{E}du\cos\beta + \mathrm{G}dv\cos\eta,$$
$$dz = \mathrm{E}du\cos\gamma + \mathrm{G}dv\cos\zeta;$$

substituant ces valeurs dans l'expression précédente, elle donne

$$\mathrm{E}\sin\theta\cos\varphi\,.\,du + \mathrm{G}\sin\theta\sin\varphi\,.\,dv;$$

et, pour qu'elle soit une différentielle exacte, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(1)\qquad \frac{d}{dv}(\mathrm{E}\sin\theta\cos\varphi) = \frac{d}{du}(\mathrm{G}\sin\theta\sin\varphi).$$

2. L'équation précédente ne renferme que les quantités E et G, dont l'expression ne change pas quand on déforme la surface S.

D'où la conséquence suivante :

Concevons que chaque rayon m conserve une position fixe par rapport au plan tangent en M, c'est-à-dire que sa projection sur ce plan tangent et l'angle qu'il fait avec ce plan demeurent invariable; cela posé, *si les rayons*

émanant des divers points de S sont normaux à une même surface et si l'on déforme S de façon que l'élément d'une courbe quelconque tracée sur cette surface concerne la même valeur, chaque plan tangent à la surface entraînant avec lui le rayon correspondant, les divers rayons dans leur nouvelle position sont encore normaux à une même surface.

3. L'équation (1) étant satisfaite pour certaines valeurs des fonctions φ et θ, elle est encore évidemment satisfaite quand on y remplace $\sin\theta$ par $k\sin\theta$, k désignant une constante arbitraire.

D'où ce beau théorème dû à Dupin :

Si des rayons normaux à une même surface se réfractent sur une surface S, ils sont encore, après leur réfraction, normaux à une même surface.

4. Chaque rayon m se projette sur le plan tangent en M, suivant une droite faisant avec la droite MX un angle égal à φ. Toutes ces projections enveloppent des courbes que l'on peut, pour abréger, appeler la projection du système de rayons sur la surface. La fonction φ étant connue, on obtiendra l'équation différentielle de cette projection en posant $\varphi = i$; d'où

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} i = \frac{G\,dv}{E\,du}.$$

En remplaçant φ par i dans l'équation (1), il vient

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta\cos i) = \frac{d}{dv}(G\sin\theta\sin i),$$

ou encore

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta)\cos i - \frac{d}{du}(G\sin\theta)\sin i - E\sin\theta\sin i\,\frac{di}{dv}$$
$$- G\sin\theta\cos i\,\frac{di}{du} = 0,$$

ou, en remplaçant respectivement $\cos i$ et $\sin i$ par leurs valeurs,

$$\frac{E\,du}{ds} \quad \text{et} \quad \frac{G\,dv}{ds},$$

$$\frac{d}{dv}(E\sin\theta)\,E\,du - \frac{d}{du}(G\sin\theta)\,G\,dv - EG\sin\theta\,di = 0,$$

ou encore

$$di\sin\theta - \frac{du}{G}\frac{d}{dv}(E\sin\theta) + \frac{dv}{E}\frac{d}{du}(G\sin\theta) = 0.$$

Si θ est constant, on peut, dans la relation précédente, supprimer le facteur commun $\sin\theta$, et, en remplaçant respectivement $\frac{dE}{dv}$ et $\frac{dG}{du}$ par leurs valeurs $-$ GM et EN, elle devient

$$di + M\,du + N\,dv = 0;$$

ce qui est précisément l'équation des lignes géodésiques.

D'où la proposition suivante :

Si des rayons émanant de chacun des points d'une surface S *sont normaux à une même surface, et si chacun d'eux fait un angle constant avec le plan tangent au point de* S *dont il émane, la projection du système de rayons sur* S *est un système de lignes géodésiques de cette dernière surface.*

5. La réciproque de cette proposition est également vraie. Considérons sur S un système de lignes géodésiques, nous choisirons les axes des u et des v, de telle sorte que ces lignes géodésiques soient définies par l'équation $v =$ const. Cela posé, cherchons les systèmes de rayons normaux à une même surface et ayant pour projection le système considéré de lignes géodésiques. Dans ce cas, on peut poser $E = 1$ et $G = F(u)$, et l'angle dé-

signé par φ est égal à zéro, l'équation (1) devient alors

$$\frac{d \sin \theta}{dv} = 0. \tag{2}$$

Cette équation étant identiquement satisfaite quand on fait $\theta =$ const., la réciproque de la proposition énoncée est démontrée. En particulier, si l'on fait $\theta = 0$, on obtient ce théorème bien connu :

Si l'on considère un système de lignes géodésiques tracées sur une surface, les tangentes aux différents points de ces lignes sont normales à une même surface.

6. On satisfait également à l'équation (2) en prenant pour θ une fonction arbitraire de u.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnés un système de lignes géodésiques tracées sur une surface et les trajectoires orthogonales de ces lignes, si par chaque point M *d'une de ces lignes on mène une droite située dans le plan tangent à cette ligne en* M *et normal à la surface, l'angle de cette droite avec le plan tangent étant constant le long d'une même trajectoire orthogonale, mais variant du reste d'une façon arbitraire quand on passe de l'une de ces trajectoires à une autre, toutes ces droites sont normales à une même surface.*

QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1874;

Par M. GENTY.

On donne une ellipse et une hyperbole homofocales; on imagine une conique quelconque C, *doublement tangente à chacune des coniques données. Trouver et discuter le lieu des points de rencontre des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole aux points où ces courbes sont touchées par la conique* C.

Nous traiterons le problème dans le cas où les coniques données sont quelconques.

On sait (Chasles, *Sections coniques*, § 482) qu'il existe en général trois séries de coniques ayant un double contact avec deux coniques données C et C'; les cordes de contact de chaque série de coniques passent par le point de rencontre des axes de symptose L et L' des coniques C et C', et sont conjuguées harmoniques par rapport à ces droites.

Donc le lieu cherché se compose de trois courbes distinctes qu'on obtiendra en considérant successivement chacun des systèmes d'axes de symptose des coniques données.

Soient donc a et a' deux points des coniques C et C' conjugués par rapport aux axes de symptose L et L', le lieu cherché sera le lieu du point d'intersection des tangentes aux points a et a', c'est-à-dire (Chasles, § 454) une conique qui passe aux points d'intersection des coniques données C et C'.

D'ailleurs les polaires des ombilics correspondant

au système considéré d'axes de symptose sont conjuguées harmoniques par rapport à ces droites. Donc les deux ombilics font partie du lieu, qui est ainsi complétement déterminé.

Ainsi donc le lieu cherché se compose de trois coniques, dont chacune passe par les quatre points d'intersection de ces deux courbes et par deux ombilics conjugués.

Autrement : Les cordes de contact avec C et C′ d'une conique doublement tangente à ces deux coniques sont les polaires de deux points situés sur la droite qui joint les ombilics correspondant au système d'axes de symptose considéré, et ils sont conjugués harmoniques par rapport à ces points.

Donc le lieu cherché est le lieu d'un point tel que deux tangentes A, A′, menées de ce point aux deux coniques données, soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites menées du même point à deux ombilics conjugués des coniques, c'est-à-dire une conique passant par les points d'intersection des proposées et par les ombilics (Chasles, § 455, corollaire II).

Dans le cas où les coniques données sont deux coniques homofocales, les ombilics conjugués sont les points imaginaires du cercle à l'infini, les foyers réels et les foyers imaginaires des courbes données. On peut donc écrire immédiatement les équations des courbes dont l'ensemble constitue le lieu demandé.

L'une d'elles est le cercle qui a son centre au centre des courbes, et qui passe par leurs points d'intersection. On aurait pu obtenir directement son équation au moyen des remarques suivantes : cette courbe est le lieu d'un point tel que deux tangentes menées de ce point aux deux courbes données soient conjuguées harmoniques par

rapport aux droites menées de ce point aux points imaginaires du cercle à l'infini, c'est-à-dire le lieu du point de rencontre de deux tangentes aux courbes données qui se coupent à angle droit.

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda^2}+\frac{y^2}{b^2-\lambda^2}=1$$

les équations des courbes données.

Les équations de deux tangentes se coupant à angle droit seront

$$y-mx=\sqrt{a^2m^2+b^2},$$

$$my+x=\sqrt{(a^2-\lambda^2)+(b^2-\lambda^2)m^2};$$

en ajoutant ces équations après les avoir élevées au carré, il vient pour l'équation du lieu cherché

$$x^2+y^2=a^2+b^2-\lambda^2.$$

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE

DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1871 ;

PAR M. GAMBEY.

Étant donnée une ligne S *dans l'espace, on détermine la courbe* S', *lieu des centres des sphères d'un rayon donné* R, *ayant avec cette courbe un contact du second ordre. On propose de faire voir que, réciproquement, la courbe proposée* S *est, pour la courbe* S', *le lieu des centres des sphères du même rayon* R, *ayant avec elle un contact du second ordre.*

Nous définirons la courbe donnée S par les équations

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s), \quad z = \theta(s),$$

l'arc s étant pris pour variable indépendante.

Soit la sphère

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 - R^2 = 0.$$

Nous exprimerons qu'elle a un contact du second ordre avec la courbe S en posant les relations suivantes (Ch. Hermite, *Cours d'Analyse*) :

$$(1) \quad \begin{cases} (\varphi - a)^2 + (\psi - b)^2 + (\theta - c)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi - a)\varphi' + (\psi - b)\psi' + (\theta - c)\theta' = 0, \\ (\varphi - a)\varphi'' + (\psi - b)\psi'' + (\theta - c)\theta'' = 0, \end{cases}$$

où φ, ψ, θ sont mis pour $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\theta(s)$, et où les dérivées sont prises par rapport à s.

Ces trois équations en a, b, c définissent une courbe S', car on peut en tirer des valeurs de la forme

$$a = \varphi_1(s), \quad b = \psi_1(s), \quad c = \theta_1(s).$$

En substituant ces valeurs dans ces équations, on obtiendra donc les trois identités

$$(2) \quad \begin{cases} (\varphi - \varphi_1)^2 + (\psi - \psi_1)^2 + (\theta - \theta_1)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi - \varphi_1)\varphi' + (\psi - \psi_1)\psi' + (\theta - \theta_1)\theta' = 0, \\ (\varphi - \varphi_1)\varphi'' + (\psi - \psi_1)\psi'' + (\theta - \theta_1)\theta'' = 0. \end{cases}$$

De même, les trois relations suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} (\varphi_1 - a_1)^2 + (\psi_1 - b_1)^2 + (\theta_1 - c_1)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\varphi'_1 + (\psi_1 - b_1)\psi'_1 + (\theta_1 - c_1)\theta'_1 = 0, \\ (\varphi_1 - a_1)\varphi''_1 + (\psi_1 - b_1)\psi''_1 + (\theta_1 - c_1)\theta''_1 = 0, \end{cases}$$

définissent une courbe S, lieu des centres des sphères,

$$(X - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (Z - c_1)^2 - R^2 = 0,$$

ayant avec la courbe S' un contact du second ordre.

Je dis maintenant qu'en posant dans les équations (3)

$$a_1 = \varphi(s), \quad b_1 = \psi(s), \quad c_1 = \theta(s),$$

ces équations deviendront des identités.

En effet, nous aurons

$$(4) \quad \begin{cases} (\varphi_1 - \varphi)^2 + (\psi_1 - \psi)^2 + (\theta_1 - \theta)^2 - R^2 = 0, \\ (\varphi_1 - \varphi)\varphi'_1 + (\psi_1 - \psi)\psi'_1 + (\theta_1 - \theta)\theta'_1 = 0, \\ (\varphi_1 - \varphi)\varphi''_1 + (\psi_1 - \psi)\psi''_1 + (\theta_1 - \theta)\theta''_1 = 0, \end{cases}$$

et l'on voit immédiatement que la première de ces relations est une identité, puisqu'elle est la même que la première des relations (2). Quant aux deux autres, on s'assurera que ce sont des identités en prenant deux fois de suite la dérivée de la première des relations (2) par rapport à s et tenant compte des identités qu'on obtiendra successivement et de celle-ci :

$$\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2 = \varphi'^2_1 + \psi'^2_1 + \theta'^2_1 = 1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Questions 833 *et* 748

(voir 2e série, t. VI, p. 480 et 528, et t. IV, p. 431);

PAR M. S. REALIS.

Si les nombres entiers a, b, c *sont racines de l'équation*

$$x^3 - px + q = 0,$$

on aura

$$p^2 + 3y'a^2 = r'^2,$$
$$p^2 + 3y''b^2 = r''^2,$$
$$p^2 + 3y'''c^2 = r'''^2,$$

y', y'', y''' *et* r', r'', r''' *étant racines entières de deux équations cubiques homogènes que l'on peut construire, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de* p *et* q. *Le produit* $r'r''r'''$, *pris positivement, sera un carré.* (S. RÉALIS.)

Posant

$$y' = 3a^2 - 2p,$$
$$y'' = 3b^2 - 2p,$$
$$y''' = 3c^2 - 2p,$$

y', y'', y''' seront racines de l'équation

$$y^3 - 3p^2y + 2p^3 - 27q^2 = 0,$$

et l'on aura, en observant que $a + b + c = 0$,

$$p^2 + 3y'a^2 = (a - b)^2(a - c)^2 = r'^2,$$
$$p^2 + 3y''b^2 = (b - c)^2(b - a)^2 = r''^2,$$
$$p^2 + 3y'''c^2 = (c - a)^2(c - b)^2 = r'''^2.$$

Ces formules font voir que

$$r'r''r''' = [(a - b)(b - c)(c - a)]^2,$$

et permettent de construire l'équation ayant r', r'', r''' pour racines, savoir

$$r^2 - 3pr^2 + 4p^3 - 27q^2 = 0.$$

Si a, b, c sont entiers, les y et les r sont aussi nécessairement entiers.

De là l'énoncé de la question.

Ajoutons que l'on déduit de ce qui précède

$$r' + r'' + r''' = 3p,$$
$$r'^2 + r''^2 + r'''^2 = (3p)^2.$$

Ces formules, où p peut représenter tout nombre de la forme $3u^2 + v^2$, et où les valeurs numériques des entiers r', r'', r''' donnent un produit égal à un carré, ces formules, dis-je, expriment une propriété du nombre $3p$ qui nous paraît digne d'être signalée.

Note. — La solution de la question 833 entraîne celle de la question analogue 748 (*voir* 2ᵉ série, t. IV, p. 431).

BIBLIOGRAPHIE.

Dynamique analytique; par M. *Émile Mathieu*. Paris, Gauthier-Villars, 1878. In-4°. Prix : 15 francs.

Quand la deuxième édition de la *Mécanique analytique* de Lagrange parut au commencement de ce siècle, elle était une œuvre accomplie; mais Poisson, Hamilton, Jacobi et d'autres géomètres ont, depuis, notablement accru l'héritage de Lagrange. Aussi M. Bertrand dut-il, en publiant la troisième édition, l'enrichir de Notes destinées à la mettre au niveau de la Science. Mais ces découvertes étaient assez importantes pour qu'on désirât voir fondre les nouveaux résultats avec les anciens, et c'est ce qui a déterminé l'auteur à composer l'Ouvrage actuel. On peut juger des résultats dont la Mécanique s'est enrichie depuis Lagrange par la seule Section II, consacrée à des travaux qui datent déjà de plusieurs années. Voici, d'ailleurs, le contenu des neuf Sections.

La première renferme les théorèmes généraux de la Dynamique, des remarques sur la stabilité d'un système libre, les équations d'Hamilton et le théorème de Gauss.

La deuxième renferme l'équation aux différences partielles d'Hamilton, son emploi pour intégrer les équations de la Dynamique, des considérations générales sur les équations aux différences partielles du premier ordre et sur les conditions d'intégrabilité, sur les intégrales secondes des équations de la Dynamique, la solution simultanée de deux équations linéaires aux différences partielles considérées par Jacobi, pour arriver au théorème de Poisson, et l'abaissement des équations de la Dynamique par suite de l'équation des forces vives ou des intégrales des aires.

La troisième renferme des applications des théories précédentes au mouvement d'un point matériel.

La quatrième traite du mouvement de rotation d'un corps solide, et la cinquième de la théorie des mouvements relatifs.

La sixième traite de la transformation des équations différentielles de la Dynamique, de la théorie des dérivées principales, due à l'auteur, et des équations différentielles de la Dynamique dans le cas d'équations de condition entre les variables.

La septième est relative à la théorie des perturbations, et la huitième aux problèmes de la Dynamique pour lesquels ont lieu les trois équations de la conservation des aires.

Enfin la neuvième est relative au mouvement des projectiles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1877)

(voir 2e série, t. XVI, p. 379);

PAR M. LEZ.

Composition de Mathématiques.

On donne l'équation $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{6^2} = 1$ *d'une hyperbole rapportée à ses axes et les coordonnées* (μ, ν) *d'un point* M *de son plan.*

Par le point M *on mène deux tangentes à l'hyperbole la touchant aux points* A *et* B : *trouver l'équation du cercle passant par les points* A, B *et le centre* O *de l'hyperbole.*

Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C *et* D, *distincts de* A *et de* B : *trouver l'équation de la droite* CD.

Si le point M *décrit une droite du plan, aux diverses positions du point* M *correspondront diverses positions de la droite* CD : *quel est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites?*

On sait que, par rapport à l'hyperbole, dont l'équation est

(1) $$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

la polaire AB d'un point M (μ, ν) a pour équation

$$b^2\mu x - a^2\nu y - a^2b^2 = 0.$$

Or, une conique passant par les quatre points où cette droite et une autre $Bx + Ay - AB = 0$ rencon-

trait la courbe (1) sera représentée par

$$b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2$$
$$- K(b^2\mu x - a^2\nu y - a^2b^2) \times (Bx + Ay - AB) = 0,$$

soit

$$(b^2 - KBb^2\mu)x^2 + (KAa^2\nu - a^2)y^2$$
$$+ K(Ba^2\nu - Ab^2\mu)xy + K(Ba^2b^2 + ABb^2\mu)x$$
$$+ K(Aa^2b^2 - ABa^2\nu)y - a^2b^2(1 + KAB) = 0.$$

Pour que la conique passe par l'origine O des coordonnées, il faut que $K = -\frac{1}{AB}$, et, pour qu'elle devienne un cercle, on doit avoir

$$Ba^2\nu = Ab^2\mu \quad \text{et} \quad b^2 + a^2 = KBb^2\mu + KAa^2\nu.$$

De ces trois relations on tire

$$A = -\frac{b^4\mu^2 + a^4\nu^2}{b^2\mu(a^2 + b^2)},$$

$$B = -\frac{b^4\mu^2 + a^4\nu^2}{a^2\nu(a^2 + b^2)},$$

$$K = -\frac{a^2b^2\mu\nu(a^2 + b^2)^2}{(b^4\mu^2 + a^4\nu^2)^2}.$$

Il est maintenant facile de trouver que le cercle passant par le centre de l'hyperbole et par les points A, B, C, D a pour équation

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu(a^4b^2 + a^2b^4 - b^4\mu^2 - a^4\nu^2)x}{a^2(a^2\nu^2 - b^2\mu^2)}$$
$$+ \frac{\nu(a^4b^2 + a^2b^4 + b^4\mu^2 + a^4\nu^2)y}{b^2(a^2\nu^2 - b^2\mu^2)} = 0,$$

et que la droite CD est représentée par

$$(2) \quad b^2\mu(a^2 + b^2)x + a^2\nu(a^2 + b^2)y + b^4\mu^2 + a^4\nu^2 = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée du centre O sur CD est

$$y = \frac{a^2\nu}{b^2\mu}x.$$

Cette perpendiculaire rencontre CD en un point ayant pour coordonnées

$$(3)\qquad x = -\frac{b^2\mu}{a^2+b^2},\quad y = -\frac{a^2\nu}{a^2+b^2}.$$

Or, le point M décrivant la droite

$$(4)\qquad nx + my - mn = 0,$$

les variables μ, ν sont liées par la relation

$$(5)\qquad n\mu + m\nu - mn = 0.$$

Pour obtenir le lieu cherché, il suffit d'éliminer μ, ν entre les relations (3) et (4), ce qui donne

$$b^2m^2(a^2+b^2)y + a^2n(a^2+b^2)x + a^2b^2mn = 0,$$

équation qui représente une droite.

Note. — Solutions analogues de MM. E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Gambey; Moret-Blanc; Thornton.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1877);

PAR M. A. TOURRETTES.

On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle ABC *rectangle en* A, *et telles que les tangentes en* B *et* C *à ces coniques aillent se couper sur la hauteur du triangle. On demande :*

1° *Le lieu du point de concours des normales en* B *et* C *à ces coniques ;*

2° *Le lieu des centres de ces coniques ; on distinguera les points du lieu qui sont centres des ellipses de ceux qui sont centres des hyperboles ;*

3° *Le lieu des pôles d'une droite quelconque* D. *Ce lieu est une conique; on considère toutes les droites* D *pour lesquelles cette conique est une parabole, et l'on demande le lieu des projections du point* A *sur ces droites.*

Je prends pour axes les côtés AB, AC du triangle, et je pose $AB = a$, $AC = b$. Soit $M(\alpha, \beta)$ un point pris sur la hauteur AD du triangle; je tire MB, MC que je considère comme deux tangentes à l'une des coniques circonscrites au triangle.

1° Les coefficients angulaires de ces tangentes étant $\frac{\beta}{\alpha - a}$, $\frac{\beta - b}{\alpha}$, les normales en B et C auront pour équations

$$(1)\qquad y = \frac{a - \alpha}{\beta}(x - a),$$

$$(2)\qquad y - b = \frac{\alpha}{b - \beta}x;$$

pour avoir le lieu des points de concours de ces normales, il suffit d'éliminer α, β entre (1), (2) et l'équation

$$(3)\qquad a\alpha - b\beta = 0,$$

qui exprime que le point M est sur la hauteur AD. On trouve sans peine les deux équations

$$ay + bx - ab = 0,$$
$$ax - by = a^2 - b^2.$$

La première est l'équation de CD et répond au cas où le point M est à l'infini sur AD : alors la conique circonscrite est un cercle.

La deuxième donne une parallèle à la hauteur, que l'on construira facilement.

2° Pour avoir l'équation générale des coniques circon-

scrites au triangle, je forme celles des tangentes : celle de MB,

$$(4)\qquad (y-\beta)(a-\alpha)+\beta(x-\alpha)=0,$$

celle de MC,

$$(5)\qquad \alpha(y-\beta)+(b-\beta)(x-\alpha)=0,$$

et celle de BC,

$$(6)\qquad ay+bx-ab=0.$$

Alors l'équation

$$[(y-\beta)(a-\alpha)+\beta(x-\alpha)] \times [\alpha(y-\beta)+(b-\beta)(x-\alpha)]-\lambda(ay+bx-ab)^2=0,$$

où λ est un paramètre arbitraire, est celle des coniques inscrites dans l'angle BMC; en exprimant qu'elle est satisfaite par les coordonnées du point A, j'aurais l'équation demandée, que l'on met aisément sous la forme

$$(7)\qquad b\beta x^2+ab\,xy+a\alpha y^2-ab\beta x-ab\alpha y=0,$$

après avoir supprimé le facteur $ab-a\beta-b\alpha$; ce facteur ne devient nul que quand le point M est en D; alors la conique est l'ensemble de deux droites confondues avec CB. Elle ne répond donc pas à la question.

Le lieu des centres des coniques (7) s'obtiendra en éliminant α, β entre les dérivées $f'x=0$, $f'y=0$, tirées de l'équation (7), et l'équation (3). On trouvera

$$(8)\qquad x^2-y^2-\frac{1}{2}(ax-by)=0,$$

équation d'une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles aux bissectrices des axes, le centre au point $\frac{a}{4}$, $\frac{b}{4}$, et passant par l'origine, où elle est tangente à la

hauteur AD, et par les milieux E, F, H des trois côtés AB, AC, CB.

Le binôme caractéristique des coniques (7) est $ab - 4\alpha\beta$, ou, au moyen de (3), $b^2 - 4\alpha^2$.

Donc, si

$$b^2 - 4\alpha^2 < 0, \text{ ellipses,}$$
$$b^2 - 4\alpha^2 = 0, \text{ parabole,}$$
$$b^2 - 4\alpha^2 > 0, \text{ hyperboles.}$$

Je construis les deux droites KI, K′I′, données par $\alpha = \pm\frac{b}{2}$, et qui vont couper AD prolongée en des points I et I′ (*).

Par conséquent, si M, étant toujours sur la hauteur L′ADL indéfiniment prolongée, se trouve entre les deux parallèles IK, I′K′, les coniques (7) seront des hyperboles ; s'il se trouve en dehors, sur IL ou I′L′, elles seront des ellipses.

Reste à savoir quelles seront les différentes parties de la courbe (8) qui répondent aux positions successives de M. Je remarque que, si l'on joint le point M au milieu H de CB, le second point d'intersection sera le centre de la conique (7) correspondante. Il est facile de voir que les droites IH et I′H sont respectivement parallèles aux asymptotes de l'hyperbole (8) et que la tangente en H est parallèle à la hauteur AD, parce que les points A et H sont symétriques par rapport au centre de l'hyperbole.

Si donc le point M se déplace de I vers L et de I′ vers L′, on aura la branche de droite ; s'il se déplace entre I et I′, on aura la branche de gauche.

En résumé, les centres des ellipses sont sur la branche

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

de droite, et ceux des hyperboles sur la branche de gauche.

3° Soit $mx + ny + p = 0$ l'équation de la droite D. Son pôle par rapport aux coniques (7) sera donné par

$$\frac{2b\beta x + aby - ab\beta}{m} = \frac{abx + 2a\alpha y - ab\alpha}{n} = -\frac{ab\beta x + ab\alpha y}{p}.$$

On aura le lieu des pôles en éliminant α et β entre ces deux équations et l'équation (3) ; ce qui donne

$$(9)\qquad \begin{cases} (2p + am)x^2 - (an - bm)xy \\ \quad - (2p + bn)y^2 - apx + bpy = 0. \end{cases}$$

Cette conique sera une parabole, si l'on a

$$(10)\qquad (an + bm)^2 + 8p(am + bn) + 16p^2 = 0\ (*).$$

Le lieu des projections du point A sur la droite D, quand la conique (9) est une parabole, s'obtiendra en éliminant m, n, p entre (10) et les deux équations

$$mx + ny + p = 0,$$
$$my - nx = 0.$$

On en tire

$$m = -\frac{px}{x^2 + y^2},\quad n = -\frac{py}{x^2 + y^2},$$

que l'on substitue dans (10). Il vient

$$16(x^2 + y^2) - 8(ax + by)(x^2 + y^2) + (ay + bx)^2 = 0,$$

(*) Lorsque les coefficients m, n, p remplissent la condition exprimée par la relation (10), la droite D est tangente à l'hyperbole équilatère que l'équation (8) représente ; il s'ensuit que le lieu des projections du point A sur la droite D est la podaire de A par rapport à cette hyperbole. (G.)

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho = \frac{1}{4}(a\cos\theta + b\sin\theta) \pm \frac{1}{4}\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Cette courbe se construit facilement au moyen du cercle

$$\rho_1 = \frac{1}{4}(a\cos\theta + b\sin\theta),$$

et de la lemniscate

$$\rho_2 = \pm\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{\cos 2\theta}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Genty, Fauquembergue, Moret-Blanc, Gambey.

La solution de M. Genty est entièrement géométrique.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

1re SESSION. — JUILLET 1877

(voir 2e série, t. XVII, p. 29);

PAR M. J. CHAMBON.

On donne un triangle AOB, *rectangle en* O, *et l'on considère toutes les hyperboles qui passent aux points* A *et* B *et ont leurs asymptotes parallèles aux côtés* OA, OB.

1° *Former l'équation générale de ces hyperboles ;*

2° *Former l'équation du lieu des sommets de ces hyperboles et construire ce lieu ;*

3° *Prenant un point* P *sur le lieu trouvé, construire celle des hyperboles considérées qui a un sommet en* P, *et reconnaître sur quelle partie du lieu doit être ce point* P, *pour que* A *et* B *appartiennent soit à une*

même branche, soit aux deux branches de cette hyperbole.

1° En prenant pour axes des coordonnées les côtés OA, OB du triangle AOB, l'équation générale des hyperboles satisfaisant à l'énoncé du problème aura la forme

$$xy + \mu x + \nu y + \lambda = 0;$$

et, si a et b sont les longueurs OA et OB, ces hyperboles devant passer aux points A et B, les paramètres λ, ν, μ satisfont aux relations

$$\mu a + \lambda = 0, \quad \nu b + \lambda = 0,$$

en vertu desquelles l'équation précédente devient

$$(1) \qquad xy - \lambda\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right) = 0.$$

2° Le lieu des sommets des hyperboles (1) s'obtiendra en éliminant λ entre l'équation (1) et l'équation générale de l'axe de ces hyperboles. Or les coordonnées du centre étant $x = \frac{\lambda}{b}$, $y = \frac{\lambda}{a}$, l'équation générale de l'axe est

$$(2) \qquad y - \frac{\lambda}{a} = x - \frac{\lambda}{b}$$

ou

$$(3) \qquad y - \frac{\lambda}{a} = \frac{\lambda}{b} - x,$$

suivant que l'on considère l'une ou l'autre des bissectrices des angles des asymptotes.

En éliminant λ entre (1) et (2), et simplifiant le résultat, on a l'équation

$$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - x + y = 0.$$

Et, en éliminant le même paramètre entre (1) et (3), on trouve pour résultat

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - x - y = 0.$$

Transportons les axes des coordonnées, parallèlement à eux-mêmes, au point $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, centre commun de ces deux courbes, les équations de ces dernières deviendront respectivement

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} - \frac{a-b}{4} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - \frac{a+b}{4} = 0.$$

Les quantités a, b étant positives, le lieu des sommets des hyperboles (1) se compose d'une hyperbole et d'une ellipse ayant même centre, même direction d'axes et circonscrites au rectangle OACB, construit sur les côtés OA, OB du triangle AOB ; en outre, ces deux courbes sont homofocales, et la distance du foyer au centre est $\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}}$ ou $\sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}}$ suivant que a est plus grand ou plus petit que b ; l'axe transverse de l'hyperbole est parallèle au plus grand des côtés OA, OB du triangle AOB.

Dans le cas particulier où le triangle AOB devient isoscèle, l'hyperbole se réduit aux diagonales du carré et l'ellipse au cercle circonscrit à ce carré.

3° Si l'on remarque que le lieu des centres des hyperboles (1) est la diagonale OC du rectangle OACB, pour avoir le centre de celle de ces hyperboles qui a son sommet en un point P, pris soit sur l'hyperbole, soit sur l'ellipse, il n'y a qu'à mener par ce point une parallèle

à la bissectrice de l'angle AOB dans le premier cas, et de son supplément dans le second cas, parallèle qui coupe la diagonale OC au centre cherché. L'hyperbole demandée est alors facile à construire.

De la manière d'obtenir ce centre résultent les conséquences suivantes :

Lorsque le point P est sur l'hyperbole (4), le centre correspondant de l'hyperbole (1) se trouve toujours en dehors du rectangle et, par suite, les points A et B, situés dans le même angle des asymptotes, appartiennent à la même branche.

Lorsque le point P est situé sur l'ellipse (5), le centre de la courbe (1) est à l'intérieur du rectangle et, par suite, les points A et B appartiennent aux deux branches de l'hyperbole (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Moret-Blanc, Gambey, A. Boilleau, Georges Lambiotte.

M. Boilleau a généralisé la question, en supposant que les droites OA, OB forment un angle *quelconque* donné.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 31);

2ᵉ SESSION.

PAR M. MORET-BLANC.

On donne un trapèze isoscèle ABCD *dont la hauteur est* $2h$, *la demi-somme des bases* $2a$, *et les angles obtus* α. *On considère toutes les coniques circonscrites à ce trapèze :*

1° *Former l'équation générale de ces coniques ;*

2° *Trouver le lieu des points de contact des tangentes*

menées à chacune d'elles parallèlement au côté BC, *et construire ce lieu, après avoir vérifié que le côté* BC *en fait partie ;*

3° *Étant donné un point de ce lieu, reconnaître le genre de la conique circonscrite au trapèze, qui passe par ce point.*

1° Prenons pour axe des x la droite qui joint les milieux des côtés non parallèles du trapèze et le milieu de cette droite pour origine des coordonnées rectangulaires. Si l'on pose $\tang \alpha = m$, les équations des bases et des côtés non parallèles du trapèze seront respectivement

$$y \mp h = 0,$$
$$y + ma \mp mx = 0,$$

et l'équation générale des coniques circonscrites au trapèze sera

$$(y + ma)^2 - m^2x^2 = k(y^2 - h^2)$$

ou

$$(1) \qquad m^2x^2 + (k - 1)y^2 - 2may - m^2a^2 - kh^2 = 0.$$

La courbe est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que k est supérieur, égal ou inférieur à 1.

2° Les points de contact des tangentes parallèles à BC doivent satisfaire en outre à l'équation $f'_x + mf'_y = 0$ ou

$$(2) \qquad mx + (k - 1)y - ma = 0.$$

On obtiendra l'équation du lieu des points de contact en éliminant k entre les équations (1) et (2). De la dernière on tire

$$k - 1 = \frac{m(a - x)}{y}, \quad k = \frac{y + ma - mx}{y}.$$

et, en substituant dans l'équation (1), il vient

$$(y - mx + ma)[m(xy + ay) + h^2] = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres

$$y - mx + ma = 0,$$
$$y(x + a) = -\frac{h^2}{m}.$$

La première représente la droite BC, qui appartient au lieu cherché. En effet, le système des droites AD, BC fait partie des coniques circonscrites au trapèze, et la droite BC est sa propre tangente.

La seconde représente une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes l'axe des x et la parallèle à l'axe des y menée par le milieu de AD. Elle passe par le point

$$y = h,\quad x = -a - \frac{h}{m} = -a + h\cot(\pi - \alpha),$$

facile à déterminer (*). Connaissant les asymptotes et un point, il est facile de construire la courbe.

3° x et y étant les coordonnées d'un point donné du lieu, on a

$$k - 1 = \frac{-m(x - a)}{y};$$

ce point appartiendra à une ellipse si $x - a$ et y sont de même signe, car $-m$ est positif ; il appartiendra à une hyperbole si $x - a$ et y sont de signes contraires, et à une parabole si $x = a$.

(*) Ce point est le point donné D. La droite AD, dont l'équation est $mx + ma = -y$, coupe l'hyperbole aux points A et D. Le côté AD du trapèze est un diamètre de cette hyperbole, dont le conjugué est égal et parallèle à BC. (G.)

Les points de contact appartenant aux hyperboles sont donc compris entre les droites $x = -a$ et $x = +a$; les points en dehors de ces deux parallèles appartiennent aux ellipses.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Gambey et Georges Lambiotte, élève à l'École Polytechnique de Bruxelles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1877).

2ᵉ QUESTION

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 320);

Par M. ROBAGLIA.

Résoudre l'équation $x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$, dans laquelle les quantités données a et b sont supposées réelles et positives.

Donner la condition de réalité des racines et, en la supposant remplie, examiner si les racines satisfont toutes à l'équation.

I. Les racines de l'équation proposée étant

$$x' = \frac{1}{2}\left(b + \sqrt{2a^2 - b^2}\right) \quad \text{et} \quad x'' = \frac{1}{2}\left(b - \sqrt{2a^2 - b^2}\right) \text{ (*)},$$

la condition de réalité est $2a^2 - b^2 \geqq 0$.

La racine x'' satisfait à l'équation $x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$,

---

(*) x' et x'' sont les racines de l'équation $x^2 - bx + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0$ qu'on obtient en faisant disparaître le radical de l'équation proposée $x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$. L'équation $x - \sqrt{a^2 - x^2} = b$ conduit de même à $x^2 - bx + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0$, et c'est pourquoi il y a lieu d'examiner si les racines x' et x'' satisfont toutes deux à l'équation proposée.

car, en remplaçant x par $\frac{1}{2}\left(b - \sqrt{2a^2 - b^2}\right)$, on a

$$x + \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b\sqrt{2a^2 - b^2}}}{2} = b \text{ (*)}.$$

Mais la racine x' ne satisfera à l'équation que si l'on a $b \geqq a$ (**).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1877).

3e QUESTION

(voir 2e série, t. XVI, p. 320);

PAR M. SONDAT.

On donne un demi-cercle construit sur AB *comme diamètre, et l'on mène la tangente* BT *au point* B. *Cela posé, on demande de mener par le point* A *la*

(*) Le radical $+\sqrt{2a^2 + 2b\sqrt{2a^2 - b^2}} = b + \sqrt{2a^2 - b^2}$; donc

$$\frac{b - \sqrt{2a^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b\sqrt{2a^2 - b^2}}}{2} = \frac{2b}{2} = b.$$

(**) La substitution de $\frac{1}{2}\left(b + \sqrt{2a^2 - b^2}\right)$ à x donne

$$x' + \sqrt{a^2 - x'^2} = \frac{b + \sqrt{2a^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 - 2b\sqrt{2a^2 - b^2}}}{2}.$$

Pour $b > a$, on a $+\sqrt{2a^2 - 2b\sqrt{2a^2 - b^2}} = b - \sqrt{2a^2 - b^2}$, et par suite

$$x' + \sqrt{a^2 - x'^2} = \frac{2b}{2} = b.$$

Si $b = a$: $\sqrt{2a^2 - b^2} = b$, $\sqrt{2a^2 - 2b\sqrt{2a^2 - b^2}} = 0$, $x' + \sqrt{a^2 - x'^2} = b$;

sécante AMN (M *et* N *étant les points où elle coupe la demi-circonférence et la tangente* BT), *telle que si l'on fait tourner la figure autour de* AB, *le volume engendré par la portion de cercle* AMB *soit équivalent au volume engendré par la surface* MNB *qui est limitée par les droites* MN, NB *et l'arc de cercle* MB.

Je mène la perpendiculaire MC au diamètre AB, et j'appelle R le rayon du cercle ; v et v' les volumes engendrés par le triangle ABN et la portion de cercle ABM.

On doit avoir

$$v = 2v';$$

et, comme $v = \frac{2}{3}\pi R.\overline{BN}^2$ et $v' = \frac{2}{3}\pi R.\overline{MC}^2 + \frac{1}{3}\pi R.\overline{BC}^2$, en considérant ce dernier volume comme engendré par le triangle AMB et le segment MB, il vient

$$\overline{BN}^2 = 2\,\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2,$$

ou, en remplaçant $\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2$ par $\overline{MB}^2$,

$$\overline{BN}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2$$

ou encore

$$\overline{MN}^2 = \overline{MC}^2.$$

Il en résulte que MN = MC, ce qui entraîne l'égalité des triangles AMC et BMN, et par suite des côtés AC et MB.

---

mais, lorsqu'on a $b < a$, il en résulte

$$+\sqrt{2a^2 - 2b\sqrt{2a^2 - b^2}} = \sqrt{2a^2 - b^2} - b;$$

d'où

$$x' + \sqrt{a^2 - x'^2} = \sqrt{2a^2 - b^2} > b.$$

La racine x' satisfait alors à l'équation $x - \sqrt{a^2 - x^2} = b$.

En désignant par x chacun de ces deux côtés, le triangle AMB donne

$$\mathrm{AM}^2 = 2\mathrm{R}x = 4\mathrm{R}^2 - x^2;$$

d'où l'équation

$$x^2 + 2\mathrm{R}x - 4\mathrm{R}^2 = 0,$$

et, en rejetant la solution négative dont la valeur absolue excède le diamètre,

$$x = \mathrm{R}(\sqrt{5} - 1)\ (^*).$$

Note. — La même question a été résolue par M. B. Robaglia.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES,

PAR M. MORET-BLANC.

Rechercher les surfaces S *du second degré sur lesquelles existe une droite* D, *telle que l'hyperboloïde de révolution* H, *qui a pour axe une génératrice rectiligne quelconque* G *de la surface* S, *et du même système que* D, *et qui passe par la droite* D, *coupe orthogonalement la surface* S *en tous les points de cette droite.*

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H, *qui se rapportent à une même surface* S *jouissant de la propriété énoncée :*

1° *Trouver le lieu des sommets* A *et celui des foyers*

(*) Cette valeur de x montre que le point C s'obtient en divisant le diamètre AB, en moyenne et extrême raison. Le plus grand des deux segments de cette division est AC.

F *des hyperboloïdes* H′ *conjugués des hyperboloïdes* H;

2° *Par l'un des foyers* F *de l'hyperboloïde* H′, *on mène un plan* P *parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites* G *et* D, *et faisant avec cette dernière un angle supplémentaire de celui que fait avec cette même droite l'axe* G *de l'hyperboloïde* H; *trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan* P *coupe la droite* D *à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface* S *et de l'hyperboloïde* H.

La normale à l'hyperboloïde H en un point de la droite D, perpendiculaire à cette droite, devant rencontrer l'axe de l'hyperboloïde, c'est-à-dire une génératrice quelconque G de la surface S, du même système que D, est une génératrice du second système. Cette condition, qui est nécessaire, est suffisante, car en tout point de la génératrice commune D, la normale à H étant contenue dans le plan tangent à S, les deux surfaces se couperont orthogonalement en tous les points de la droite D.

Il résulte de là que les surfaces S sont des paraboloïdes hyperboliques à plans directeurs rectangulaires.

Si l'on prend la droite D pour axe de z, les plans directeurs pour plans des xz et des xy, et la génératrice du second système perpendiculaire au premier plan directeur pour axe des y, l'équation des surfaces S, abstraction faite de leur position dans l'espace, sera

$$(S) \qquad yz = kx,$$

k étant une constante pour une même surface S, et variant d'une surface à l'autre.

Les équations des génératrices du premier système

(celui de D) sont

$$\text{(G)}\qquad \left\{ \begin{aligned} y &= \mu k, \\ z &= \frac{1}{\mu} x, \end{aligned} \right\} \text{ équations de l'axe.}$$

1° Le centre de l'hyperboloïde H est sur l'axe Oy à la distance μk de l'origine ou de la droite D ; l'équation de cet hyperboloïde, rapporté à son centre et à ses axes, est $\frac{x'^2 + y'^2}{\mu^2 k^2} - \frac{z'^2}{k^2} = 1$. Pour le rapporter aux axes primitifs, il faut transporter l'origine au point O et faire tourner les axes Ox' et Oz' de l'angle α, dont la tangente est μ.

Les formules de transformation sont

$$y' = y - \mu k,\quad x' = x\cos\alpha - z\sin\alpha,\quad z' = x\sin\alpha + z\cos\alpha.$$

L'équation de l'hyperboloïde H devient, en chassant les dénominateurs,

$$\begin{gathered}(\cos^2\alpha - \mu^2\sin^2\alpha)x^2 + y^2 + (\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha)z^2 \\ - 2(1+\mu^2)\sin\alpha\cos\alpha\, xz - 2\mu k y = 0.\end{gathered}$$

Mais on a

$$\sin\alpha = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}},\quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}};$$

en remplaçant $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ par leurs valeurs, il vient

$$\text{(H)}\qquad (1-\mu^2)x^2 + y^2 - 2\mu xz - 2\mu k y = 0.$$

2° Les sommets de l'hyperboloïde conjugué H′ sont sur l'axe, à une distance du centre égale à k, et les foyers à la distance $k\sqrt{1+\mu^2}$.

On a donc pour coordonnées des sommets, α étant l'angle de l'axe avec OZ,

$$x = \pm k\sin\alpha = \pm\frac{\mu k}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

$$y = \mu k,\quad z = \pm k\cos\alpha = \pm\frac{k}{\sqrt{1+\mu^2}},$$

d'où l'on tire, en éliminant μ,

$$x^2 + z^2 = k^2,$$
$$yz = kx;$$

le lieu des sommets est l'intersection du paraboloïde S et du cylindre $x^2 + z^2 = k^2$. Les coordonnées des foyers sont $x = \pm \mu k$, $y = \mu k$, $z = \pm k$. Les foyers sont donc situés sur les deux droites $z = k$, $y = x$ et $z = -k$, $y = -x$.

3° Si, par le foyer F ($x = \mu k$, $y = \mu k$, $z = k$), on mène un plan P parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites G et D, c'est-à-dire parallèle à l'axe Oy, et faisant avec D un angle supplémentaire de l'angle que l'axe G fait avec D, ce plan coupera évidemment la droite D à la distance $z = 2k$ de l'origine. Le lieu des droites qui joignent ce point à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection des surfaces S et H est donc un cône.

On a :

Équation du plan P:

(1) $$\mu z + x = 2\mu k;$$

Équation de la surface S:

(2) $$yz = kx;$$

Équation de l'hyperboloïde H :

(3) $$(1 - \mu^2) x^2 + y^2 - 2\mu xz - 2\mu ky = 0;$$

Équations d'une génératrice du cône:

(4) $$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - 2k}{z - 2k} = \frac{1}{\lambda}.$$

On obtiendra l'équation du cône en éliminant x, y, z, λ, μ entre ces six équations, ce qui donne, en remettant les petites lettres,

(5) $$(z - 2k)^2 (x^2 + y^2)(3x - 2y) - x^4 (x - 2y) = 0.$$

Remarque. — Tous les plans P passent par la droite

$$z = 2k,\ x = 0,$$

qui se trouve ainsi introduite dans l'équation du cône comme solution étrangère.

On trouverait de même, en remplaçant le foyer F par le foyer F', le cône

$$(z + 2k)^2 (x^2 + y^2)(3x + 2y) - x^4 (x + 2y) = 0,$$

renfermant la solution étrangère $z = -2k,\ x = 0$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Escary et Gambey.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877

(voir 2e série, t. XVII, p. 106);

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES. PHILOSOPHIE. RHÉTORIQUE. SECONDE. TROISIÈME.

PAR UN ABONNÉ.

I. — *Mathématiques élémentaires.*

Étant donnés deux plans P *et* P' *et un point* A *hors de ces plans, on considère toutes les sphères qui passent par le point* A, *et qui sont tangentes aux deux plans donnés :*

1° *Trouver le lieu de la droite qui joint le point* A *au centre de la sphère variable ;*

2° *Trouver le lieu du point où cette sphère touche l'un des plans.*

Dans le cas le plus général, les plans P, P' se coupent, et le point A est situé dans l'intérieur de l'un des angles dièdres formés par P et P'. Le centre C de la sphère

variable appartient au plan bissecteur de cet angle dièdre. Les projections c, c' de C sur les plans P, P' sont les points de contact de la sphère et de ces plans.

Soient Aa la perpendiculaire menée du point A sur le plan bissecteur ; A' le symétrique de A, par rapport à ce plan ; p, p' les points où la perpendiculaire Aa prolongée coupe les plans P, P'. Il est clair que A' est un point de la sphère dont C est le centre, et qui passe en A, et que la droite pc est tangente à la sphère en c. On a donc $pc = \sqrt{pA' \times pA}$; il s'ensuit que le lieu du point c où la sphère variable touche le plan P est une circonférence qui a pour centre le point p, et pour rayon la moyenne géométrique entre pA' et pA. De même, le lieu du point c' est une circonférence dont p' est le centre et qui a pour rayon $\sqrt{p'A' \times p'A}$. Ces deux circonférences sont égales et symétriques par rapport au plan bissecteur.

La ligne plane décrite par le centre C de la sphère variable, se projetant suivant une circonférence sur le plan P, est, comme on sait, une ellipse. Le point a est le centre de cette ellipse ; ses axes se déterminent au moyen d'une construction bien connue.

Par conséquent, le lieu de la droite qui joint le point A au centre de la sphère variable est un cône dont la trace sur le plan bissecteur est une ellipse déterminée, et qui a pour sommet le point donné A.

Lorsque les plans P, P' sont parallèles, le centre C de la sphère appartient à un plan parallèle à P et P' et équidistant de P et P'. La ligne décrite par C se projetant en vraie grandeur sur le plan P est une circonférence, et le lieu de la droite AC est un cône de révolution.

Note. — Même solution de MM. Moret-Blanc et Gambey.

II. — *Philosophie.*

Étant donnée une sphère de rayon R, *trouver :*

1° *Le lieu du sommet d'un trièdre dont les trois arêtes sont tangentes à cette sphère, et dont les trois faces sont égales chacune à* 60 *degrés ;*

2° *Le lieu du sommet d'un angle trièdre dont les plans des trois faces sont tangentes à la même sphère, et dont les trois angles dièdres sont égaux chacun à* 120 *degrés.*

1° Soient SA, SB, SC les trois arêtes tangentes aux points A, B, C à la sphère dont le centre est O, et le rayon R. Il résulte des données de la question que les six arêtes du tétraèdre SABC sont égales entre elles. La droite OS est perpendiculaire au plan ABC, en un point M, centre du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC. On a

$$CM = \frac{CB}{\sqrt{3}} = \frac{SC}{\sqrt{3}}$$

et

$$OC \times SC = OS \times CM$$

ou

$$R.SC = OS \frac{SC}{\sqrt{3}};$$

donc

$$OS = R\sqrt{3}.$$

Le lieu du sommet S est donc une sphère concentrique à la sphère donnée, et dont le rayon est $R\sqrt{3}$.

2° A, B, C désignant les points de contact, les trois faces du trièdre OABC sont égales chacune à 60 degrés.

Les six arêtes du tétraèdre OABC sont égales à R.

On a

$$CM = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

et

$$OM^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}; \quad OM = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

D'autre part, le triangle rectangle OCS donne

$$OC^2 = OM \times OS, \quad \text{ou} \quad R^2 = R\sqrt{\frac{2}{3}} \times OS,$$

d'où

$$OS = R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Le lieu du sommet S est une sphère concentrique à la sphère donnée, et dont le rayon

$$OS = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Note. — Même solution de M. Moret-Blanc.

III. — *Rhétorique.*

Par un point A, *pris en dehors d'une circonférence donnée* O, *on mène à cette circonférence une tangente* AB, *terminée au point de contact* B, *et l'on demande quelle doit être la distance* AO *pour que, en faisant tourner la figure autour de cette droite, l'aire de la surface engendrée par* AB *soit la moitié de la surface engendrée par la circonférence* O.

Menons BH perpendiculaire sur AO, et posons $BH = h$, $OB = r$, $OA = x$. Les aires engendrées par AB et par la circonférence ont respectivement pour valeurs $\pi . OB . AH$, et $4\pi . OB^2$; d'où

$$\pi . OB . AH = 2\pi . OB^2, \quad AH = 2 OB = 2r.$$

Le triangle rectangle ABO donne $AB^2 = AO \times AH$, ou

$$x^2 - r^2 = x \times 2r, \quad x^2 - 2rx - r^2 = 0;$$

$$x = r + r\sqrt{2} = r(1 + \sqrt{2}).$$

IV. — *Seconde.*

La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypoténuse partage ce triangle en deux triangles partiels : démontrer que le carré du rayon du cercle inscrit dans le triangle total est égal à la somme des carrés des rayons des cercles inscrits dans les triangles partiels.

Cette proposition résulte immédiatement de ce que les rayons des cercles inscrits dans des triangles semblables sont proportionnels aux côtés homologues de ces triangles.

V. — *Troisième.*

Soit ABC *un triangle dans lequel l'angle* A *est droit, et l'angle* B *double de l'angle* C. *On construit en dehors du triangle* ABC : 1° *sur l'hypoténuse* BC *le carré* BCDE; 2° *sur le côté* AB, *le triangle équilatéral* ABF; 3° *sur le côté* AC, *le triangle équilatéral* ACG. *On joint le point* F *au point* G, *et au point* E, *extrémité du côté* BE *du carré* BCDE.

On suppose l'hypoténuse BC *égale à* a, *et l'on demande de calculer :* 1° *les côtés* AB, AC *du triangle* ABC; 2° *la distance du point* F *à la droite* BE, *et la distance du point* G *à la droite* AF; 3° *la surface du quadrilatère* EFGD.

1° Dans le triangle rectangle ABC, l'angle C = 30 degrés, donc :

$$1^\circ\ AB = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a, \quad \text{et} \quad AC = \frac{1}{2} a\sqrt{3}.$$

2° Si l'on prolonge la droite EB jusqu'à sa rencontre avec FA en un point H, l'angle ABH supplément de ABE sera de 30 degrés. Par suite, l'angle BHF est droit : donc la

distance FH du point F à la droite BE est égale à $\frac{a}{4}$. De même le prolongement AM de FA forme avec AC un angle de 30 degrés; la droite FM est, par conséquent, perpendiculaire à GC, au point M, milieu de GC; elle est parallèle à BC et à DE. Ainsi la distance GM du point G à la droite AF est égale à $\frac{1}{4} a \sqrt{3}$.

3° Le quadrilatère EFGD étant la somme des triangles FDG, FDE, on a

$$\text{EFGD} = \frac{1}{2}\text{DG} \times \text{FM} + \frac{1}{2}\text{DE} \times \text{DM},$$

puisque FM est parallèle à DE.

Or,

$$\text{DG} = \text{DC} + \text{CG} = a + \frac{1}{2} a \sqrt{3} = \frac{1}{2} a (2 + \sqrt{3}),$$

$$\text{FM} = \text{MH} + \text{HF} = a + \frac{1}{4} a = \frac{5a}{4},$$

$$\text{DE} = \text{BC} = a,$$

$$\text{DM} = \text{DC} + \text{CM} = a + \frac{1}{4} a \sqrt{3} = \frac{1}{4} a (4 + \sqrt{3}).$$

Il en résulte

$$\text{EFGD} = \frac{5}{16} a^2 (2 + \sqrt{3}) + \frac{1}{8} a^2 (4 + \sqrt{3});$$

d'où

$$\text{EFGD} = \frac{1}{16} a^2 (18 + 7\sqrt{3}).$$

On peut aussi exprimer la surface EFGD en fonction de l'hypoténuse a, en remarquant que EFGD est la somme du trapèze EFMD et du triangle rectangle FMG, dont il est facile d'évaluer les surfaces.

CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. de Jonquières à M. Gerono.*

Monsieur et cher Professeur,

Vous avez bien voulu m'inviter à rechercher s'il existe des nombres entiers, autres que 5, dont chacun jouisse, comme celui-ci, de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres consécutifs ($5 = 1^2 + 2^2$) et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres consécutifs ($5^2 = 3^2 + 4^2$), ajoutant que vous étiez porté à croire qu'il n'y en a aucun.

La chose se prouve sans difficulté pour tous les nombres premiers autres que 5 et pour tous les nombres composés de deux facteurs simples, comme vous le verrez par la démonstration que j'ai l'honneur de vous communiquer. Mais il reste à chercher si le théorème est vrai pour tout nombre composé de plus de deux facteurs simples.

En me livrant à cette étude, nouvelle pour moi, j'ai rencontré la propriété suivante des réduites d'une certaine classe de fractions continues, qui peut-être n'a point encore été remarquée. J'observerai pourtant que, dans le très-intéressant et important Mémoire de M. Lucas, intitulé: *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise* et que vous avez bien voulu me communiquer hier, je trouve (p. 2) une relation semblable (au moins quant à l'une des deux parties de ma proposition) entre les termes de même rang de la *série de Lamé*, qui ne sont autres que ceux des réduites de la fraction continue suivant laquelle se développe $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Bien qu'il n'y ait pas une analogie complète entre ce cas particulier et le cas

général que j'ai examiné avant d'avoir eu connaissance de l'ouvrage de M. Lucas, j'ai cru ne pas devoir passer sous silence le rapprochement auquel le passage cité donne lieu.

Cela dit, voici la proposition dont il s'agit :

Théorème. — *Si l'on représente par* $\frac{P_n}{Q_n}$ *la réduite de rang n* $\left(\textit{la première étant, selon l'usage, } \frac{1}{0}\right)$ *de la fraction continue suivant laquelle se développe la racine carrée de* a^2+1 (*a étant un nombre entier*), *on a les deux relations*

$$P_{2n} = P_n . Q_n + P_{n+1} Q_{n+1},$$
$$Q_{2n} = \overline{Q_n}^2 + \overline{Q_{2n+1}}^2.$$

On en conclut, par exemple, que 5 est le seul nombre premier (car 1 ne doit pas être compté) qui soit et dont le carré soit aussi la somme des carrés de deux nombres consécutifs. Je le démontre aussi par une autre voie qui a l'avantage de donner à cette proposition une plus grande extension.

L'étude de la fraction continue dont il est question ci-dessus donne encore lieu aux remarques suivantes, qui m'ont été suggérées par la lecture du Mémoire de M. Lucas. Les notations demeurant les mêmes, il est aisé de démontrer qu'on a toujours

$$P_n P_{n+1} - P_{n-1} P_{n+2} = (-1)^{n-1} 2a (a^2+1),$$
$$P_n^2 - P_{n-1} P_{n+1} = (-1)^{n-1} (a^2+1),$$
$$Q_n Q_{n+1} - Q_{n-1} Q_{n+2} = (-1)^n 2a,$$
$$Q_n^2 - Q_{n-1} Q_{n+1} = (-1)^n,$$
$$Q_n Q_{n+1} - Q_{n-1} Q_{n-2} = 2a\, Q_{2(n-1)}.$$

E. de Jonquières.

Paris, 29 avril 1878.

2. *Extrait d'une lettre de M. S. Realis.* — « ... Permettez-moi d'observer que la solution donnée (p. 132) de la question 1237 n'est pas satisfaisante. Cette solution, en effet, ne convient qu'au cas très-particulier où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont tous des nombres pairs; dans les autres cas, l'expression proposée se trouve décomposée, par la formule de M. *Cauret,* en deux facteurs, dont l'un est la somme de quatre carrés entiers, tandis que l'autre est la somme de quatre carrés fractionnaires. La formule mentionnée ne répond donc pas à l'énoncé de la question. »

Dans l'égalité

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 &= A(A + 2B + 1) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + 1) \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)[(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 \\ &\qquad + (2\gamma + 1)^2 + (2\delta + 1)^2] \; (*), \end{aligned}$$

établie (p. 133), le facteur

$$\frac{1}{4}[(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 + (2\gamma + 1)^2 + (2\delta + 1)^2]$$

est effectivement la somme des carrés des quatre nombres fractionnaires $\alpha + \frac{1}{2}$, $\beta + \frac{1}{2}$, $\gamma + \frac{1}{2}$, $\delta + \frac{1}{2}$.

Mais cette somme peut toujours être transformée en la somme des carrés de quatre nombres entiers. Les calculs de cette transformation sont complétement indiqués dans une solution de la question 1237, que M. Realis nous a communiquée.

Deux cas sont à distinguer suivant que $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ est un nombre pair, ou impair.

(*) Nous rétablissons ici le terme $(2\delta + 1)^2$ qui a été omis dans l'impression.

Dans le premier, B ou $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}$ est un nombre entier, et il en est de même de

$$B + 1,\ B - (\gamma + \delta),\ B - (\beta + \delta),\ B - (\alpha + \delta).$$

Or, en ayant égard aux relations

$$2B = \alpha + \beta + \gamma + \delta \quad \text{et} \quad A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$

on a

$$A + 2B + 1 = (B + 1)^2 + [B - (\gamma + \delta)]^2 + [B - (\beta + \delta)]^2 + [B - (\alpha + \delta)]^2;$$

donc $A + 2B + 1$ ou

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2$$

est égal à la somme des carrés de quatre nombres entiers.

Lorsque $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ est impair, $B + \frac{1}{2}$ est un nombre entier, et il en est de même de $B + \frac{1}{2} - \alpha$, $B + \frac{1}{2} - \beta$, $B + \frac{1}{2} - \gamma$, $B + \frac{1}{2} - \delta$, et l'on a encore

$$A + 2B + 1 = \left(B + \frac{1}{2} - \alpha\right)^2 + \left(B + \frac{1}{2} - \beta\right)^2 + \left(B + \frac{1}{2} - \gamma\right)^2 + \left(B + \frac{1}{2} - \delta\right)^2;$$

donc, dans les deux cas, $A + 2B + 1$ ou

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\delta + \frac{1}{2}\right)^2$$

est égal à la somme de quatre carrés entiers.

3. Une solution de la question 1237 nous a été adressée

par M. Pisani, trop tardivement pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro de mars dernier.

En nommant $2p$ le nombre pair

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

un calcul assez simple a conduit à l'égalité

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)(2p + 1).$$

Le nombre impair $2p+1$ est, comme le remarque M. Pisani, égal à la somme de quatre carrés entiers dont deux sont égaux; reste à exprimer ces carrés entiers en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: c'est ce qui manque à la solution de M. Pisani. On y prouve seulement que $2p + 1$ est la somme des carrés des quatre nombres fractionnaires $\alpha + \frac{1}{2}$, $\beta + \frac{1}{2}$, $\gamma + \frac{1}{2}$, $\delta + \frac{1}{2}$, ce qui résulte aussi de la formule de M. Cauret. (G.)

EXERCICES SUR LE TÉTRAÈDRE;

Proposés par M. GENTY.

---

1. Si, dans un tétraèdre, les arêtes opposées sont égales deux à deux, on peut dire que ce tétraèdre est *isoscèle*. Les quatre faces d'un tétraèdre isoscèle sont évidemment des triangles égaux.

Soient a, b, c les côtés de l'un de ces triangles, A, B et C les angles. Soient de plus α, β, γ les médianes qui joignent les milieux des côtés a, b et c respectivement, aux milieux des côtés opposés du tétraèdre.

2. On a

$$\alpha^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

$$\beta^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2},$$

$$\gamma^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}:$$

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2,$$
$$b^2 = \gamma^2 + \alpha^2,$$
$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

3. Les médianes sont en même temps les plus courtes distances des arêtes opposées du tétraèdre, et elles forment un trièdre trirectangle.

4. Les angles dièdres opposés du tétraèdre sont égaux deux à deux; et, si φ, ψ, θ sont les angles dièdres qui ont pour arêtes les côtés a, b et c de la face ABC, on a

$$\frac{\sin\varphi}{a} = \frac{\sin\psi}{b} = \frac{\sin\theta}{c},$$

et par suite

$$\frac{\sin\varphi}{\sin A} = \frac{\sin\psi}{\sin B} = \frac{\sin\theta}{\sin C}.$$

5. Si V est le volume du tétraèdre, on a

$$V = \frac{\alpha\beta\gamma}{3}.$$

On a aussi

$$V = \frac{abc}{3}\sqrt{\cos A \cos B \cos C}.$$

6. Si S est l'aire de l'une des faces du tétraèdre, on a

$$S = \frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2}}{2}.$$

On a donc aussi

$$\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4}.$$

7. Le point d'intersection des médianes, qui est le centre de gravité du tétraèdre, est en même temps le centre des sphères inscrite et circonscrite.

Si R et r sont les rayons de ces deux sphères, on a

$$R^2 = \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2}{4(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)} = \frac{a^2b^2c^2 \cos A \cos B \cos C}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

$$r^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

8. Tous les angles plans d'un tétraèdre isoscèle sont nécessairement des angles aigus.

9. Si l'on désigne par P la puissance de l'un des sommets du tétraèdre par rapport à la sphère inscrite, on a

$$P = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} = \frac{(\beta^2+\gamma^2)(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+\beta^2)}{4(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2)}.$$

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 1232

(voir p. 130);

Par M. A. PELLISSIER.

En un point M *d'une conique, on construit la parabole osculatrice, et l'on prend le symétrique* P *du foyer* F

de cette parabole, par rapport à la tangente en M ; *démontrer que le point* M *et son symétrique* N *par rapport à* P *sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique.*

(LAGUERRE.)

La parabole osculatrice d'une ellipse au point M a même axe de déviation que cette dernière en ce point ; elle lui est tangente, et elle a même rayon de courbure. On en conclut immédiatement que OM est un diamètre de la parabole osculatrice. Le foyer F de cette courbe se trouve donc sur la ligne MF, symétrique de MO, par rapport à la tangente MT.

D'autre part, le rayon de courbure de l'ellipse en M est

$$\frac{b'^3}{ab} \quad \text{ou} \quad \frac{b'^2}{a' \sin\theta},$$

en appelant a' le demi-diamètre OM, b' son conjugué, et θ l'angle de ces deux diamètres.

Le rayon de courbure de la parabole, au même point, est $\frac{P'}{2\sin\theta}$, où P' est le paramètre du diamètre OM.

On a donc, en égalant ces deux rayons de courbure,

$$\frac{b'^2}{a' \sin\theta} = \frac{P'}{2\sin\theta},$$

ou, en remarquant que $P' = 4.FM$,

$$2.FM = MN = \frac{b'^2}{a'};$$

par suite

$$ON = OM + MN = a' + \frac{b'^2}{a'}$$

et

$$OM \times ON = a'\left(a' + \frac{b'^2}{a'}\right) = a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

La dernière égalité montre bien que les points M, N sont réciproques par rapport au cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note du rédacteur. — Dans le *Traité des sections coniques* de M. Salmon, il est démontré (p. 206, 3ᵉ édit., 1855) qu'en désignant par $x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0$, l'équation d'une conique, rapportée à une tangente et à la normale au point de contact, la parabole osculatrice en ce point a pour équation

$$x^2 + Bxy + \frac{B^2}{4}y^2 + Ey = 0;$$

il en résulte évidemment qu'au point de contact les deux courbes ont le même diamètre.

Les expressions $\frac{b'^2}{a' \sin\theta}$, $\frac{P'}{2 \sin\theta}$ des rayons de courbure se trouvent aussi dans le même ouvrage (p. 207 et 208).

L'égalité $OM \times ON = a^2 + b^2$ indique un moyen très-simple de déterminer la parabole osculatrice en un point M d'une ellipse donnée; car cette égalité donne immédiatement le point N, et en prenant le symétrique F du milieu P de MN, par rapport à la tangente en M, on a le foyer de la parabole. La directrice de cette courbe s'obtient en menant au point P une perpendiculaire à la direction du diamètre OM. (G.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1239

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 288);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

L'équation $x^3 - 6\alpha\beta x - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0$, dans laquelle α et β sont des entiers quelconques qui n'annulent pas le dernier terme, n'a pas de racines entières.

(S. REALIS.)

En effet, l'équation peut être écrite ainsi :

$$(x+\alpha)^3 + (x+\beta)^3 = (x-\alpha+\beta)^3,$$

et l'on sait qu'Euler a démontré que jamais un cube entier ou fractionnaire n'est égal à la somme de deux cubes rationnels (*).

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1240

(voir 2e série, t. XVI, p. 287);

Par M. MORET-BLANC.

L'équation

$$x^3 - (\beta-\gamma)x + \alpha\gamma = 0,$$

dans laquelle α *et* γ *sont des entiers plus grands que zéro, et* β *est un entier satisfaisant à la condition*

$$\alpha^2 > \beta \geqq (\alpha-1)^2,$$

ou bien à la condition

$$\alpha^2 < \beta \leqq (\alpha+1)^2,$$

a au moins une racine réelle incommensurable.

(S. Realis.)

Le coefficient du premier terme étant 1, l'équation n'admet pour racines commensurables que des racines entières; de plus, elle a une racine réelle de signe contraire à $\alpha\gamma$, c'est-à-dire négative.

Substituant à x dans le premier membre successivement $-(\alpha-1)$, $-\alpha$ et $-(\alpha+1)$, on a les trois ré-

---

(*) Voir l'*Algèbre* d'Euler, ou la *Théorie des nombres* de Legendre.

sultats

$$-(\alpha-1)[(\alpha-1)^2-\beta]+\gamma,$$
$$-\alpha(\alpha^2-\beta),$$
$$-(\alpha-1)[(\alpha+1)^2-\beta]-\gamma.$$

Si l'on a $\alpha^2 > \beta \geqq (\alpha-1)^2$, les deux premiers résultats sont de signes contraires, et l'équation a une racine incommensurable comprise entre $-(\alpha-1)$ et $-\alpha$.

Si l'on a $\alpha^2 < \beta \leqq (\alpha+1)^2$, les deux derniers résultats sont de signes contraires, et l'équation a une racine incommensurable comprise entre $-\alpha$ et $-(\alpha+1)$.

Le théorème est donc démontré.

Le même théorème s'applique évidemment à l'équation

$$x^3-(\beta-\gamma)x-\alpha\gamma=0,$$

qui a une racine incommensurable comprise entre $\alpha-1$ et α, ou entre α et $\alpha+1$.

Question 1243

(voir 2e série, t. XVI, p. 335);

PAR M. FERDINANDO PISANI.

« *Dans tous les triangles circonscrits à une conique donnée, et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés, le rapport d'une hauteur au diamètre conjugué de celui qui passe par son pied est constant.* » (POUJADE.)

Soient ABC le triangle circonscrit; a, b, c les pieds des hauteurs Aa, Bb, Cc; O le centre de la conique tangente aux côtés du triangle aux points a, b, c; Oa', Ob', Oc' les rayons conjugués des rayons Oa, Ob, Oc, qui passent par les pieds des hauteurs (*).

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

On sait que les droites Oa', Ob', Oc' sont respectivement parallèles aux côtés BC, AC, AB du triangle circonscrit. En outre on a, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{Oa'}{Ob'} = \frac{Ca}{Cb}.$$

D'autre part, la similitude des triangles AaC, BbC donne

$$\frac{Ca}{Cb} = \frac{Aa}{Bb};$$

donc

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{Oa'}{Ob'} \quad \text{ou} \quad \frac{Aa}{Oa'} = \frac{Bb}{Ob'}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. Lez.

Question 1247

(voir 2e série, t. XVI, p. 336);

PAR M. E. DUNOYER,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Marseille.

Dans les surfaces du second ordre à centre unique, ce centre pouvant d'ailleurs être situé à distance finie, ou infinie, le lieu des points tels que les génératrices rectilignes réelles ou imaginaires soient orthogonales est donné par l'intersection réelle ou imaginaire de la surface considérée avec la sphère de Monge, relative à cette surface. (ESCARY.)

On peut donner plusieurs démonstrations de ce théorème ; voici, je crois, la plus simple.

Soient AB et AC deux génératrices orthogonales, réelles ou imaginaires ; le plan BAC est tangent à la sur-

face. Le plan mené par AB et perpendiculaire à BAC est tangent à la surface, puisqu'il la coupe déjà suivant une génératrice rectiligne. De même, le plan mené par AC perpendiculaire à BAC est tangent. On a ainsi trois plans tangents rectangulaires passant par le point A : donc ce point se trouve sur la sphère de Monge; par conséquent, le lieu du point A est donné par l'intersection de la surface considérée avec la sphère de Monge, relative à cette même surface.

Note. — Solutions analogues de MM. Barbarin et Couette.

Question 1252

(voir 2e série, t. XVI, p. 432);

PAR M. BEAUGEY,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Soient O *et* XY *un point et une droite fixes. Du point* O *on mène jusqu'à la droite :*

OA *quelconque;*

OB *perpendiculaire à* OA;

OC *bissectrice de l'angle droit* AOB;

OD *perpendiculaire à* OC.

Déterminer le minimum de la somme AB + CD *des deux hypoténuses.*

Du point O j'abaisse la perpendiculaire OP sur la droite XY. Soit $OP = a$; soient aussi α et β les angles BOP et COP.

J'ai

$$AB = BP + PA = a(\tang\alpha + \cot\alpha),$$

$$CD = CP + PD = a(\tang\beta + \cot\beta);$$

d'où

$$AB + CD = a\,(\tan\alpha + \cot\alpha + \tan\beta + \cot\beta).$$

Mais

$$\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

et

$$\tan\beta + \cot\beta = \frac{1}{\sin\beta\cos\beta};$$

donc

$$\begin{aligned} AB + CD &= a\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\beta\cos\beta}\right) \\ &= 2a\left(\frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\sin 2\alpha \sin 2\beta}\right) \\ &= 4a\left[\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha \sin 2\beta}\right]. \end{aligned}$$

Or

$$\alpha + \beta = 45^\circ, \quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{2};$$

donc

$$\begin{aligned} AB + CD &= 2a\sqrt{2}\,\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha \sin 2\beta} \\ &= 2a\sqrt{2}\,\frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta} \\ &= \frac{1}{2}a\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}\right), \end{aligned}$$

$\alpha + \beta$ ayant une valeur constante de 45 degrés, le produit $\sin\alpha\sin\beta$ est maximum pour $\alpha = \beta$; il en est de même de $\cos\alpha\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$; donc le minimum de $AB + CD$ aura lieu pour $\alpha = \beta$, c'est-à-dire lorsque les deux triangles seront symétriques par rapport

à la perpendiculaire OP, abaissée du point O sur la droite XY (*).

Note. — La même question a été résolue par MM. Armand Bertrand, propriétaire à Azillanet (Hérault); F. Loppé, caporal au 119e de ligne; Louis Rajola Pescarini, à Naples; Ferdinando Pisani, professeur à l'Institut technique de Girgenti; Thornton, à la Virginie; Jamet, Moret-Blanc; Droz, ingénieur à Zürich; P. Sondat; Lez; Morel; Lacombe; Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; Robaglia; Cottereau, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux (classe de M. Escary); Eugène Delmas, élève du lycée de Lyon.

M. Bertrand en a donné deux solutions; la première, entièrement

---

(*) Lorsque $\alpha = 6$, l'égalité $AB + CD = 4a\,\dfrac{\sin(\alpha + 6)\cos(\alpha - 6)}{\sin 2\alpha\,.\,\sin 2 6}$ devient $AB + CD = 4a\,\dfrac{1}{\sin 2\alpha} = 4a\sqrt{2}$. Donc le minimum de $AB + CD$ est $4a\sqrt{2}$.

Les plus petites valeurs de la somme et du produit des deux hypoténuses AB, CD peuvent être déterminées, sans calculs, au moyen des considérations suivantes :

Remarquons d'abord qu'en menant d'un point donné O des droites aux milieux M, M' des hypoténuses AB, CD, on forme un triangle OMM' qui est rectangle au point O; car les angles OMM', OM'M, extérieurs aux triangles isoscèles OAM, ODM', sont respectivement doubles des angles A et D, dont la somme est égale à la moitié d'un angle droit. Et, comme $OM = \frac{1}{2}AB$, et $OM' = \frac{1}{2}CD$, on voit que la question proposée se ramène à trouver le minimum de la somme $OM + OM'$ des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle MOM', dont la hauteur OP est invariable et donnée.

Il est évident que l'hypoténuse MM' de ce triangle ne peut être moindre que le double de la hauteur OP et qu'elle est égale à 2 OP, quand le triangle est isoscèle; à partir de cette valeur 2 OP, l'hypoténuse peut croître indéfiniment. Or, lorsque l'hypoténuse augmente, il en est de même de la somme des carrés et du produit des deux côtés OM, OM' de l'angle droit, et, par suite, la somme $OM + OM'$ de ces deux côtés est croissante. Donc les plus petites valeurs de $OM + OM'$ et de $OM \times OM'$ sont celles que ces deux quantités prennent quand le triangle OMM' est isoscèle. Dans ce cas on a

$$OM + OM' = 2\,OP\sqrt{2} \quad \text{et} \quad OM \times OM' = OP \times MM' = 2\,OP^2.$$

De là résulte que les minima de la somme et du produit des deux hypoténuses AB, CD ont pour valeurs $4\,OP\sqrt{2}$, et $8\,\overline{OP}^2$. (G.)

analytique, consiste en des calculs de Trigonométrie et de dérivées; voici la seconde ; nous conservons la rédaction de l'auteur :

« La solution de cette question se déduit comme corollaire de la proposition suivante, que nous allons démontrer :

» *Si l'on considère un angle constant* AOB, *tournant autour du sommet* O, *et une droite indéfinie* XY; *le segment* AB *déterminé par les côtés de l'angle* AOB *sur la droite* XY, *sera minimum quand le triangle* AOB *sera isoscèle.*

» Abaissons OP perpendiculaire sur XY et posons

$$OP = h, \quad AOP = \varphi, \quad BOP = \varphi', \quad \varphi + \varphi' = \alpha.$$

» Les triangles rectangles AOP, BOP donnent

$$AP = h \tan\varphi, \quad BP = h \tan\varphi';$$

ajoutons membre à membre, il vient

$$AB = h(\tan\varphi + \tan\varphi').$$

Or nous avons

$$\tan\varphi + \tan\varphi' = \frac{\sin\alpha}{\cos\varphi \cos\varphi'} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha + \cos(\varphi - \varphi')}.$$

Sous cette forme, on voit facilement que l'expression est minimum quand $\varphi' = \varphi$.

» Remarquons maintenant que, dans la question proposée, on a

$$AB + CD = AD + CB.$$

» Or, d'après ce qui précède, les segments AD, CB seront minima quand les triangles AOD, COB seront isoscèles; d'ailleurs, les angles AOC, BOD étant égaux, ces minima auront lieu simultanément. Donc, puisque les deux parties AD, CB de la somme AB + CD sont simultanément minima quand AOD est isoscèle, la somme AB + CD sera elle-même minimum dans les mêmes circonstances. »

Question 1253

(voir 2e série, t. XVI, p. 132);

Par M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

On propose de résoudre les équations

$$zy - r^2 = A, \quad xz - s^2 = B, \quad xy - t^2 = C,$$
$$st - rx = D, \quad tr - sy = E, \quad rs - zt = F.$$

(J. Ch. Dupain.)

Je pose d'abord

$$BC - D^2 = a,\quad AC - E^2 = b,\quad AB - F^2 = c,$$
$$EF - AD = d,\quad DF - BE = e,\quad DE - CF = f,$$

$$\begin{vmatrix} x & t & s \\ t & y & r \\ s & r & z \end{vmatrix} = \delta,\quad \begin{vmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{vmatrix} = \Delta.$$

Des équations proposées je tire ensuite

$$\delta x = a,\quad \delta y = b,\quad \delta z = c,\quad \delta r = d,\quad \delta s = e,\quad \delta t = f;$$

d'où, en substituant dans l'une des proposées, la première par exemple, les valeurs de z, y et r, et remarquant que l'on a

$$\frac{bc - d^2}{A} = \frac{ac - e^2}{B} = \frac{ab - d^2}{C} = \Delta,$$

on obtient

$$\delta^2 = \Delta;$$

par suite, il vient

$$\Delta x^2 = a^2,\quad \Delta y^2 = b^2,\quad \Delta z^2 = c^2,$$
$$\Delta r^2 = d^2,\quad \Delta s^2 = e^2,\quad \Delta t^2 = f^2,$$

d'où x, y, z, r, s, t.

Il n'y a que deux systèmes de solutions; la condition de réalité est $\Delta > 0$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Sondat; Jamet Thornton; Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; Louis Rajola Pescarini; Moret-Blanc; Ferdinando Pisani; Bussy, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux.

Question 1254

(voir 2e série, t. XVI, p. 432);

PAR M. MORET-BLANC.

Démontrer la formule suivante, où C_m^n *est le nombre des combinaisons de m objets n à n :*

$$kC_a^k + (k-1)C_a^{k-1}C_b^1 + (k-2)C_a^{k-2}C_b^2 + \ldots = \frac{a}{a+b}C_{a+b}^k.k.$$

(H. LAURENT.)

Soient a objets d'une première espèce et b objets d'une seconde espèce. Si l'on forme toutes les combinaisons de ces $(a+b)$ objets pris k à k, et que dans chacune on mette successivement à la première place chacun des objets qui y rentrent sans s'occuper de l'ordre des autres, le nombre des groupes ainsi obtenus sera

$$kC_{a+b}^k.$$

Ces groupes peuvent se partager en deux classes : ceux qui commencent par un des a objets de la première espèce et ceux qui commencent par un des b objets de la seconde. Le nombre des groupes compris dans la première classe est précisément le premier membre de la formule à démontrer, et, comme chacun des objets se trouve évidemment en tête le même nombre de fois, le rapport du nombre des groupes de la première classe au nombre total des groupes est $\frac{a}{a+b}$. On a donc

$$\frac{kC_a^k + (k-1)C_a^{k-1}C_b^1 + (k-2)C_a^{k-2}C_b^2 + \ldots}{kC_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b},$$

ou

$$k\,C_a + (k-1)\,C_a^{k-1}\,C_b^1$$
$$+ (k-2)\,C_a^{k-2}\,C^b + \ldots = \frac{a}{a+b}\,C_{a+b}^k . k.$$

C. Q. F. D.

Note. — La formule a été démontrée par MM. L. Troupenet, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux; Ch. Doyère, du lycée de Caen; J. Mouchel; Pescarini; J. de Virieu, professeur à Lyon; F. Romero, à Saint-Jean-de-Luz; Ferdinando Pisani.

QUESTIONS.

1255. D'un point M on mène des parallèles aux côtés d'un triangle ABC, qui rencontrent respectivement les deux autres côtés en des points a, α; b, β; c, γ : démontrer que la somme

$$Ma . M\alpha + Mb . M\beta + Mc\, M\gamma$$

est égale à la puissance du point M par rapport au cercle circonscrit au triangle.

(H. Schröter.)

1256. La lettre l désignant un logarithme népérien, démontrer les inégalités

$$\frac{ln . l(n+1)}{2} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{3} + \ldots + \frac{ln}{n} > \frac{ln . l(n+1)}{2} - \frac{1}{12};$$
$$\frac{39}{31} - \frac{l(n+1)}{n} > \frac{l2}{2} + \frac{l3}{2.3} + \ldots$$
$$+ \frac{ln}{(n-1)n} > \frac{5}{4} - \frac{l(n+1)+1}{n}.$$

(C. Moreau.)

1257. Étant donné dans un plan un pentagone con-

vexe quelconque ABCDE, chaque système de trois côtés consécutifs de ce pentagone donne un triangle.

Démontrer que les cinq cercles circonscrits à ces triangles déterminent par leurs intersections cinq points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, situés sur une même circonférence.

(C. Moreau.)

1258. Soient ABC un triangle;

D, E, F les pieds des hauteurs menées des sommets A, B, C:

O le point d'intersection de la ligne EF avec une parallèle au côté BC menée par le sommet A;

a le milieu de BC;

G et H les points d'intersection de AO et d'un cercle décrit du point O comme centre avec Oa pour rayon.

On demande de démontrer :

1° Que les droites aG et aH sont, respectivement, les bissectrices des angles OaB et OaC;

2° Que, si la hauteur AD coupe le cercle au point K, on a $AK = Ba$. (Genty.)

1259. Si l'on développe l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^n$ suivant les puissances de α : 1° le développement aura toujours un nombre impair de termes; 2° les coefficients de la lettre ordonnatrice des termes équidistants de celui du milieu sont identiquement égaux; 3° si l'on égale à zéro ces coefficients qui sont des polynômes entiers et rationnels en x, ils ont toutes leurs racines imaginaires lorsqu'ils sont de degré pair, et ils renferment, en outre, une racine nulle lorsqu'ils sont de degré impair.

(Escary.)

1260. D'un point O pris sur une circonférence dont un diamètre est OE, on décrit une circonférence qui

rencontre la première en des points A, B; puis on joint un point quelconque C de la deuxième circonférence aux points A, B, E, par des droites qui coupent la première en des points F, D, G.

1° Les droites EF, ED sont respectivement parallèles à CB, CA.

2° La droite CE fait avec les côtés du triangle CAB les mêmes angles que la médiane partant du sommet C.

3° La droite CG est moyenne géométrique entre GA et GB.

(A. Cambier.)

1261. On prend un point A sur un diamètre fixe d'une circonférence donnée; soit ABC le triangle isoscèle d'aire maximum, tel que B, C soient des points de la circonférence donnée et que BC soit perpendiculaire sur le diamètre passant par A. Trouver l'enveloppe de la droite AC quand A se meut sur le diamètre fixe.

(Lemoine.)

1262. Un point F est donné par ses coordonnées α, β, relativement à deux axes OX, OY, comprenant entre eux un angle θ : on demande de trouver l'équation de l'hyperbole qui passe par l'origine O, qui a le point F pour un de ses foyers, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes OX et OY.

Quatre hyperboles répondent à la question. L'équation de chacune d'elles étant de la forme $xy - px - qy = 0$, il s'agit de trouver les quatre couples de valeurs de p et q, exprimées en fonctions des données α, β et θ.

(A. Boilleau.)

1263. 1° Si par deux points M, N, pris sur la circonférence circonscrite à un triangle, on mène des droites faisant avec les côtés du triangle des angles α égaux et de

même orientation, les deux transversales qui joignent respectivement les trois sommets d'angles issus de M, et les trois sommets d'angles issus de N, se coupent en un point P sous un angle constant.

2° Déterminer le lieu du point P, quand on fait varier l'angle α. (P. Terrier.)

1264. On donne une droite dont le coefficient d'inclinaison est $\tang \alpha$ (axes rectangulaires). Indiquer une construction graphique qui donne directement $\tang^3 \alpha$. Application à la construction graphique d'une tangente à la cissoïde et à la strophoïde, parallèlement à une direction donnée.

(H. Brocard.)

1265. Le centre d'un cercle O de rayon constant se déplace dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe O'. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe P, par rapport au cercle O.

(Laisant.)

1266. Si, par le pôle de l'orthogénide

$$\rho^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} \sin\left(-\frac{1}{3}\omega\right),$$

on mène une droite quelconque, les tangentes aux points d'intersection de cette droite avec l'orthogénide forment un triangle équilatéral (*). Trouver le lieu du centre de ce triangle et l'enveloppe du cercle circonscrit, lorsque la droite oscille autour du pôle.

(E. Lucas.)

(*) *Voir* 2e série, t. V, p. 30, et t. XV, p. 101.

ÉTUDE SUR LES DÉCOMPOSITIONS EN SOMMES DE DEUX CARRÉS, DU CARRÉ D'UN NOMBRE ENTIER COMPOSÉ DE FACTEURS PREMIERS DE LA FORME $4n+1$, ET DE CE NOMBRE LUI-MÊME.

FORMULES ET APPLICATION A LA RÉSOLUTION COMPLÈTE, EN NOMBRES ENTIERS, DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES, SIMULTANÉES, $y = x^2 + (x+1)^2$ ET $y^2 = z^2 + (z+1)^2$;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

I. Soient $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ les n facteurs du nombre N, que nous supposerons d'abord à la première puissance et, par suite, tous différents entre eux.

Chacun d'eux étant un nombre premier, de la forme $4k+1$, se décompose d'une seule manière en une somme de deux carrés premiers entre eux. On a donc

$$f_1 = a_1^2 + b_1^2, \quad f^2 = a_2^2 + b_2^2, \quad \ldots, \quad f_n = a_n^2 + b_n^2.$$

et nous supposerons $a_i > b_i$; car les deux nombres a_i, b_i sont inégaux, l'un pair et l'autre impair.

Le nombre I de toutes les décompositions possibles du nombre N en une somme de deux carrés est, dans le cas actuel, donné par la formule $I = \frac{1}{2} 2^n = 2^{n-1}$, et le nombre I′ des décompositions de N^2 par la formule

$$I' = \tfrac{1}{2}(3^n - 1).$$

(*Voir* GAUSS, *Recherches arithmétiques*, p. 157. — LEGENDRE, *Théorie des nombres*, 2e édition, p. 268, et GENOCCHI, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIII, 1re série, p. 165.)

Ces $\dfrac{3^n - 1}{2}$ décompositions de N^2 se subdivisent en n

espèces distinctes, que nous désignerons par les signes $(E_1), (E_2), \ldots, (E_n)$.

Celles de la première espèce (E_1) sont au nombre de n, et dans chacune d'elles les deux nombres composants admettent $n - 1$ facteurs communs avec N.

Celles de la deuxième espèce (E_2) sont au nombre de $2\dfrac{n(n-1)}{1.2}$, et dans chacune d'elles les deux nombres composants admettent $n - 2$ facteurs communs avec N.

Celles de la troisième espèce (E_3) sont au nombre de $2^2\dfrac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, et chacun des deux nombres composants y admet $n - 3$ facteurs communs avec N.

Et ainsi de suite, jusqu'à la dernière espèce (E_n), qui comprend 2^{n-1} solutions (nombre précisément égal à celui des décompositions de N), dans aucune desquelles l'un ou l'autre des nombres composants n'a de facteur commun avec N.

Le nombre total de ces décompositions, dans les n espèces réunies, est donc

$$I' = n + 2\frac{n(n-1)}{1.2} + 2^2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + 2^{n-2}n + 2^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

Les propositions précédentes, que M. Volpicelli a simplement énoncées, à peu près dans les mêmes termes, dans le tome IX (1re série) des *Nouvelles Annales*, année 1850, sont intuitives. Il est évident, en effet, que parmi les I' décompositions de N^2 doivent se trouver celles de $f_1^2\left(\dfrac{N}{f_1}\right)^2$ et de ses analogues, formant une première espèce, dans laquelle f_1 est facteur commun des deux nombres x et y dont la somme des carrés est

égale à N^2. On doit y trouver pareillement celles de $f_2^1 f_2^2 \left(\frac{N}{f_1 f_2}\right)^2$, et de ses analogues, dans chacune desquelles le second facteur $\frac{N}{f_1 f_2}$ est le seul décomposé, et ainsi de suite.

Quant aux *formes* de ces décompositions, M. Volpicelli se borne à faire connaître la plus simple de toutes, celle de l'espèce (E_1), qu'il écrit ainsi :

$$x = (a_i^2 - b_i^2)\frac{N}{f_i}, \quad y = 2a_i b_i \frac{N}{f_i} \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = N^2,$$

l'indice i devant recevoir successivement toutes les valeurs comprises depuis 1 jusqu'à n. Cette forme bien connue est celle qui se présente pour la décomposition du carré d'un nombre premier de la forme $4n+1$ en une somme de deux carrés.

J'ignore si M. Volpicelli a fait connaître plus tard, dans quelque autre recueil mathématique, les formules relatives aux $n-1$ autres espèces; j'ajoute même que je ne le crois pas. Quoi qu'il en soit, ayant été conduit tout dernièrement à les découvrir, à l'occasion du problème d'Analyse indéterminée cité dans le titre de cette Étude, je vais les donner ici, dans la pensée que cette communication ne fera double emploi avec aucune autre publiée antérieurement et à mon insu sur le même sujet.

II. Les valeurs des nombres composants x, y dans les décompositions de la deuxième espèce (E_2) sont

$$x = \frac{N}{f_i f_{i'}}[(a_i^2 - b_i^2)(a_{i'}^2 - b_{i'}^2) \pm 4a_i b_i . a_{i'} b_{i'}],$$

$$y = \frac{N}{f_i f_{i'}}[2a_i b_i (a_{i'}^2 - b_{i'}^2) \mp 2a_{i'} b_{i'} (a_i^2 - b_i^2)],$$

les signes supérieurs devant être pris ensemble et les

signes inférieurs ensemble, et i, i' prenant toutes les valeurs possibles, mais différentes entre elles, depuis 1 jusqu'à n.

On peut donner à ce résultat un autre énoncé qui, dans sa généralité, convient, comme je vais le dire, aux décompositions des autres espèces, et permet d'en abréger uniformément la définition. Nous dirons donc que x et y ont, respectivement, pour valeurs les produits du facteur $\frac{N}{f_i f_{i'}}$ multiplié successivement par toutes les décompositions de la *dernière* (ici la seconde) espèce, dont est susceptible le carré d'un nombre composé des deux facteurs simples et premiers f_i, $f_{i'}$, qui ne font point partie du facteur $\frac{N}{f_i f_{i'}}$ commun à x et à y.

D'après cela, le nombre des décompositions de l'espèce (E_2) est égal à $2\frac{n(n-1)}{2}$, car le carré d'un nombre composé de deux tels facteurs ne comporte que quatre décompositions, dont deux appartiennent à la première espèce déjà considérée et ne figurent pas parmi celles de la seconde, qui est alors la dernière espèce.

III. Les valeurs de x et de y dans la troisième espèce (E_3) ont pareillement pour valeurs respectives les produits du facteur $\frac{N}{f_i f_{i'} f_{i''}}$ multiplié successivement par toutes les décompositions de troisième ou dernière espèce des carrés des nombres composés des trois facteurs f_i, $f_{i'}$, $f_{i''}$, qui ne figurent pas dans $\frac{N}{f_i f_{i'} f_{i''}}$, de sorte que l'espèce (E_3) contient $2^2\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ décompositions distinctes, ou systèmes de valeurs différentes et conjuguées de x et de y.

Et ainsi de suite, jusqu'au groupe (E_n), de telle sorte qu'un groupe (E_p), d'espèce p, contient

$$2^{p-1}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p}$$

décompositions ou systèmes de valeurs de x et y, c'est-à-dire autant de fois 2^{p-1} qu'il y a de combinaisons possibles des diviseurs premiers de N, pris p à p.

IV. Quant au dernier groupe (E_n), dont la forme et la composition précises sont particulièrement intéressantes, on peut dire les seules essentielles à connaître, puisqu'elles concourent exclusivement, sauf un facteur connu d'avance, à la composition des valeurs de x et de y dans les autres espèces, le facteur $\frac{N}{f_1 f_2 \ldots f_n}$ est égal à l'unité ; le groupe contient en totalité 2^{n-1} décompositions distinctes, et x ni y n'ont en commun aucun des facteurs de N. Le système *type* ou *fondamental* des valeurs de x et de y dans ce groupe, c'est-à-dire celui qu'on peut écrire immédiatement, et duquel les $2^{n-1}-1$ autres systèmes de ce groupe se déduisent par de simples changements dans les signes des termes dont il se compose, est le suivant, qui dérive de la théorie des combinaisons et de la décomposition fondamentale

$$N^2 = \overline{(a^2-b^2)}^2 + \overline{2ab}^2$$

appliquée au cas $N = a^2 + b^2$.

Désignons, pour abréger, par $\Pi_k(ab)$ et $\Pi_k(a^2-b^2)$ le produit de k facteurs, tels que ab et (a^2-b^2), et par Σ la somme de tous les produits de ce genre qu'on obtient en combinant entre eux, k à k, et de toutes les manières possibles, les produits $a_i b_i$, ou les termes $(a_i^2-b_i^2)$, de

telle sorte, par exemple, que le terme symbolique

$$\Sigma\left[\Pi_2(ab)\,\Pi_2(a^2-b^2)\right]$$

représente la somme

$$\begin{aligned} & a_1 b_1 . a_2 b_2 (a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\ + & a_1 b_1 . a_3 b_3 (a_2^2 - b_2^2)(a_4^2 - b_4^2) \\ + & a_1 b_1 . a_4 b_4 (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2) \\ + & a_2 b_2 . a_3 b_3 (a_1^2 - b_1^2)(a_4^2 - b_4^2) \\ - & a_2 b_2 . a_4 b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 - b_3^2) \\ + & a_3 b_3 . a_4 b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2). \end{aligned}$$

D'après ces notations, les formules fondamentales qui expriment les valeurs *types* ou initiales de x et de y dans le groupe (E_n) sont

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} x = {} & \Pi_n(a^2-b^2) \\ & - 2^2\Sigma\left[\Pi_2(ab).\Pi_{n-2}(a^2-b^2)\right] \\ & + 2^4\Sigma\left[\Pi_4(ab).\Pi_{n-4}(a^2-b^2)\right] - \text{etc.} \ldots, \\ y = {} & 2.\Sigma\left[\Pi_1(ab).\Pi_{n-1}(a^2-b^2)\right] \\ & - 2^3\Sigma\left[\Pi_3(ab).\Pi_{n-3}(a^2-b^2)\right] \\ & + 2^5\Sigma\left[\Pi_5(ab).\Pi_{n-5}(a^2-b^2)\right] - \text{etc.} \ldots. \end{aligned} \right.$$

Dans ces valeurs de x et de y, les termes réunis sous un même signe sommatoire Σ ont tous le même signe, ces groupes de termes prenant alternativement le signe $+$ et le signe $-$, en commençant dans l'une et dans l'autre formule par le signe $+$.

Avant d'indiquer de quelle manière, c'est-à-dire par quelles permutations de signes, les $2^{n-1}-1$ autres systèmes de valeurs de x et de y dont se compose le groupe (E_n) se déduisent des formules types (1), faisons quelques remarques essentielles sur ces formules.

Le premier terme de la valeur de x, savoir $\Pi_n(a^2-b^2)$, est, d'après la convention établie que $a_i > b_i$, toujours positif.

Le groupe de termes qui suit, compris avec le signe — sous le premier signe Σ, se compose de $\frac{n(n-1)}{2}$ termes. Le suivant en contient sous le signe +

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4},$$

et ainsi de suite.

Le premier groupe de la valeur de y se compose de n termes. Le suivant en contient $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$, et ainsi de suite d'après la même loi, de telle sorte que x contient, en totalité, 2^{n-1} termes et que y en contient le même nombre, comme cela doit être, puisque ces valeurs sont conjuguées deux à deux.

(*La suite prochainement.*)

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

AUTRE MANIÈRE POUR ARRIVER AUX FORMULES D'ADDITION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

L'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = 0,$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 119.

qui devient, par les substitutions $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$,

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = 0,$$

admet pour intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}} = \text{const.};$$

mais on peut lui trouver, comme l'ont prouvé Euler et Lagrange, une intégrale algébrique. Posons, à cet effet, avec Lagrange,

$$(2) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = dt$$

ou

$$(3) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi},$$

puis

$$(4) \qquad \varphi + \psi = p, \quad \varphi - \psi = q;$$

on aura

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{dq}{dt}\right) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \dfrac{p+q}{2}}, \\[2ex] \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dp}{dt} - \dfrac{dq}{dt}\right) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \dfrac{p-q}{2}}; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p+q}{2}} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p-q}{2}},$$

$$\frac{dq}{dt} = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p+q}{2}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{p-q}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = k^2\left[\sin^2 \frac{p-q}{2} - \sin^2 \frac{p+q}{2}\right],$$

ou enfin

$$(6)\qquad \frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = -k^2 \sin p \sin q.$$

Mais, en différentiant (3), on a

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{-k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} \frac{d\varphi}{dt} = -k^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -k^2 \sin\psi \cos\psi;$$

d'où l'on tire, par addition et soustraction,

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2p}{dt^2} &= -k^2 \sin p \cos q, \\ \frac{d^2q}{dt^2} &= -k^2 \sin q \cos p. \end{aligned} \right.$$

De (6) et (7), on tire

$$\frac{d^2p}{dp\,dq} = \frac{\cos q}{\sin q}, \quad \frac{d^2q}{dp\,dq} = \frac{\cos p}{\sin p},$$

ou

$$\frac{d^2p}{dp} = \frac{\cos q\,dq}{\sin q}, \quad \frac{d^2q}{dq} = \frac{\cos p\,dp}{\sin p},$$

ou

$$\frac{dp}{dt} = \alpha \sin q, \quad \frac{dq}{dt} = \alpha' \sin p,$$

α et α' désignant deux constantes qui doivent rentrer l'une dans l'autre. En remplaçant p et q par leurs valeurs dans ces formules, on a

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} + \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} &= \alpha \sin(\varphi - \psi), \\ \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi} &= \alpha' \sin(\varphi + \psi). \end{aligned} \right.$$

Ce sont là deux intégrales de la formule (1); mais, en éliminant dt entre les deux formules précédentes, on

obtient une nouvelle intégrale. En effet, on a

$$\frac{dp}{\alpha \sin q} = \frac{dq}{\alpha' \sin p} \quad \text{ou} \quad \alpha' \sin p\, dp = \alpha \sin q\, dq,$$

et, en intégrant,

$$\alpha \cos p = \alpha' \cos q + \alpha'',$$

α'' étant une nouvelle constante, et l'on a

$$(9) \qquad \alpha \cos(\varphi + \psi) = \alpha' \cos(\varphi - \psi) + \alpha''.$$

Or, on peut mettre l'intégrale de la formule (1) sous la forme

$$(10) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} - \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\psi}} = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu}},$$

μ désignant une constante à laquelle se réduit φ pour $\psi = 0$. Si, dans les formules (8) et (9), on fait $\psi = 0$, on a

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1 = \alpha \sin\mu,$$

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1 = \alpha' \sin\mu,$$

$$\alpha \cos\mu = \alpha' \cos\mu + \alpha''.$$

On en tire

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1}{\sin\mu}, \quad \alpha' = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1}{\sin\mu},$$

$$\alpha'' = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1}{\sin\mu} \cos\mu - \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1}{\sin\mu} \cos\mu,$$

ou

$$\alpha'' = \frac{2 \cos\mu}{\sin\mu}.$$

En portant dans la formule (9) ces valeurs de α, α', α'', on a

$$\frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} + 1}{\sin\mu} \cos(\varphi + \psi)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\mu} - 1}{\sin\mu} \cos(\varphi - \psi) + \frac{2 \cos\mu}{\sin\mu},$$

et, en effectuant,

$$(11)\qquad \cos\varphi\cos\psi - \sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}\,\sin\varphi\sin\psi = \cos\mu.$$

Cette formule est une des intégrales les plus célèbres de l'équation (1); les formules (8) en fournissent deux autres :

$$(12)\quad \begin{cases} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} + \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} + 1}{\sin\mu}\sin(\varphi - \psi), \\ \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi} - \sqrt{1 - k^2\sin^2\psi} \\ \qquad = \dfrac{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu} - 1}{\sin\mu}\sin(\varphi + \psi), \end{cases}$$

identiques au fond à la formule (11).

Maintenant, si l'on fait

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = a, \quad \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = b,$$

la formule (1) donnera

$$\int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}} = a - b;$$

donc

$$\varphi = \operatorname{am} a, \quad \psi = \operatorname{am} b, \quad \mu = \operatorname{am}(a - b).$$

Les formules (11) et (12) donneront alors

$$(13)\qquad \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn}(a - b) + \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b = \operatorname{cn}(a - b),$$

$$\operatorname{dn} a - \operatorname{dn} b = \frac{\operatorname{dn}(a - b) + 1}{\operatorname{sn}(a - b)}(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a),$$

$$\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} b = \frac{\operatorname{dn}(a - b) - 1}{\operatorname{sn}(a - b)}(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a).$$

Si nous posons, un instant, $\operatorname{dn}(a - b) = y$, $\operatorname{sn}(a - b) = x$,

nous aurons, au lieu de ces dernières formules,

$$x(\operatorname{dn} a - \operatorname{dn} b) = (y + 1)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a),$$

$$x(\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} b) = (y - 1)(\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a),$$

ou

$$x \operatorname{dn} a - y \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b = - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a,$$

$$x \operatorname{dn} b - y \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a = - \operatorname{sn} a \operatorname{cn} b.$$

On en tire

$$\operatorname{sn}(a - b) = \frac{\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 b - \operatorname{sn}^2 b \operatorname{cn}^2 a}{\operatorname{dn} b \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b},$$

$$\operatorname{dn}(a + b) = \frac{\operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a - \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b}{\operatorname{dn} b \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b}.$$

Si l'on multiplie haut et bas ces deux formules par l'expression conjuguée de leur dénominateur, on a, en observant que $\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 b - \operatorname{sn}^2 b \operatorname{cn}^2 a$ est égal à $\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b$,

$$(14) \quad \operatorname{sn}(a - b) = \frac{\operatorname{dn} b \operatorname{cn} b \operatorname{sn} a - \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$(15) \quad \operatorname{dn}(a - b) = \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

C. Q. F. D.

SUR LES QUESTIONS 1248 ET 1249;

PAR M. E. CATALAN.

J'ai lu, avec un vif intérêt, les deux Notes de M. le capitaine Moreau (*). Elles m'ont semblé susceptibles de certains *compléments*, que je soumets à l'appréciation de l'honorable auteur.

(*) *Nouvelles Annales*, mars 1878.

I. M. Moreau considère les séries

$$(1)\quad S = (1+q)\sum_0^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n+1}}, \quad s = (1-q)\sum_0^\infty \frac{(-q)^n}{1-q^{2n+1}},$$

q désignant la plus petite racine de l'équation

$$(2)\qquad x^2 - ax + 1 = 0 \quad (a > 2)\,(*).$$

Posant

$$(3)\qquad \frac{1}{1+q} + \frac{q}{1+q^3} + \frac{q^2}{1+q^5} + \ldots = f(q),$$

$$(4)\qquad \frac{1}{1-q} - \frac{q}{1-q^3} + \frac{q^2}{1-q^5} - \ldots = \varphi(q),$$

M. Moreau prouve que

$$f(q) = \varphi(q).$$

En conséquence,

$$(5)\qquad \frac{S}{s} = \frac{1+q}{1-q}.$$

Or les séries (3), (4) sont connues : si l'on fait, avec Jacobi,

$$\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad \omega' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}},$$

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad q = e^{-\pi\frac{\omega}{\omega'}},$$

on a

$$f(q) = \varphi(q) = \frac{k\omega}{2\pi\sqrt{q}}\,(**).$$

Ainsi

$$(6)\qquad S = \frac{1+q}{\sqrt{q}}\,\frac{k\omega}{2\pi}, \quad s = \frac{1-q}{\sqrt{q}}\,\frac{k\omega}{2\pi}.$$

(*) On verra tout à l'heure pourquoi nous avons modifié les notations employées par M. Moreau.

(**) *Fundamenta nova*..., p. 103.

II. On a aussi

$$(7)\qquad \frac{k\omega}{2\pi} = \sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}\, q^{2n+\frac{1}{2}}\ (*).$$

Dans cette formule, ε_{4n+1} *est l'excès du nombre des diviseurs de* $4n+1$, *ayant la forme* $4\mu+1$, *sur le nombre de ceux qui ont la forme* $4\mu-1$ (**). Conséquemment, les formules (6) équivalent à celles-ci :

$$(8)\quad S = (1+q)\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}\, q^{2n},\qquad s = (1-q)\sum_0^\infty \varepsilon_{4n+1}\, q^{2n}.$$

La *question* 1248, proposée par M. Édouard Lucas, suppose $a = 3$.

Il résulte, de cette valeur,

$$q = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \ldots,\qquad s = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{29} + \ldots.$$

Ainsi ces deux séries, à termes fort simples, ont mêmes limites que les séries (8), ordonnées suivant les puissances du nombre $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

III. D'après la relation

$$D_{n+2} - a D_{n+1} + D_n = 0,$$

si les deux premiers dénominateurs sont entiers, tous le seront (***). Or

$$D_0 = 1,\quad D_1 = \frac{1+q^3}{q(1+q)} = \frac{q^2-q+1}{q} = a - 1 = \text{entier}.$$

(*) *Fundamenta*, p. 105. — *Recherches sur quelques produits indéfinis*, p. 115.

(**) *Recherches*..., p. 75.

(***) Nous supposons a entier.

Ainsi, l'énoncé de la question 1248 peut être modifié d'une infinité de manières (*).

Exemples. — 1° $a = 4$, $D_1 = 3$, $q = 2 - \sqrt{3}$:

$$S = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{41} + \frac{1}{153} + \cdots,$$

$$s = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{19} - \frac{1}{71} + \frac{1}{265} - \cdots \quad (**) ;$$

$$\frac{S}{s} = \sqrt{3}.$$

2° $a = 6$, $D_1 = 5$, $d_1 = 7$, $q = 3 - \sqrt{8}$:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{169} + \frac{1}{985} + \cdots,$$

$$s = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{41} - \frac{1}{239} + \frac{1}{1393} - \cdots;$$

$$\frac{S}{s} = \sqrt{2}.$$

IV. Dans son élégante solution de la *question* 1249, M. le capitaine Moreau fait observer que :

1° *On satisfait à l'équation*

$$y_n = y_{n-1}^2 - 2,$$

en prenant

$$y_n = x^{(2n)} + x^{-(2n)},$$

si

$$x^2 - y_0 x + 1 = 0;$$

(*) Remarque déjà faite par le capitaine Moreau.

(**) En général, le dénominateur du deuxième terme de s est, en valeur absolue,

$$d_1 = \frac{1 - q^3}{q(1 - q)} = a + 1.$$

$$2^{\circ} \quad \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0 y_1} + \frac{1}{y_0 y_1 y_2} + \ldots = \frac{y_0 - \sqrt{y_0^2 - 4}}{2}.$$

De là résultent, par exemple, les sommations suivantes, assez remarquables :

$$\sqrt{24} = 5 - \frac{1}{10} - \frac{1}{10.98} - \frac{1}{10.98.9602} - \ldots,$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5.17} + \frac{4.16}{5.17.259} + \frac{4.16.256}{5.17.257.65.537} + \ldots.$$

V. Comme l'a remarqué M. Gerono (*), l'énoncé de la *question* 1181 n'est pas complet. D'autre part, la démonstration publiée dans les *Nouvelles Annales* (**) est un peu longue. On peut, comme il suit, trouver rapidement la formule exacte, et même une formule un peu plus générale.

On a, *identiquement*,

$$1 = \frac{a-1}{a} + \frac{1}{a},$$

$$1 = \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{ab} + \frac{1}{ab},$$

$$1 = \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{ab} + \frac{c-1}{abc} + \frac{1}{abc},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Par conséquent : 1° *Si les produits* ab, abc, $abcd$,... *croissent au delà de toute limite,*

$$\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{ab} + \frac{c-1}{abc} + \ldots = 1;$$

(*) *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 181.

(**) T. XV, p. 135.

2° *Si ces produits tendent vers une limite* λ,

$$\text{(A)}\qquad \frac{a-1}{a}+\frac{b-1}{ab}+\frac{c-1}{abc}+\ldots=1-\frac{1}{\lambda}.$$

On trouve, de la même manière,

$$\text{(B)}\quad \frac{a-\alpha}{a}+\frac{b\alpha-\beta}{ab}+\frac{c\beta-\gamma}{abc}+\ldots=1-\lim\frac{\theta}{abc\ldots t}.$$

VI. Pour appliquer la formule (A), prenons

$$a=1+q,\quad b=1+q^2,\quad c=1+q^3,\quad d=1+q^4,\ \ldots.$$

De là résulte

$$\lambda=\lim(1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\ldots;$$

ou, avec les notations de Legendre (*),

$$\lambda=\beta\beta'=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{2^{\frac{1}{6}}k^{-\frac{1}{12}}k'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{24}}}.$$

Ainsi

$$\frac{q}{1+q}+\frac{q^2}{(1+q)(1+q^2)}+\frac{q^3}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)}+\ldots$$
$$=1-2^{\frac{1}{6}}k^{-\frac{1}{12}}k'^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{24}}.$$

Le second membre peut être écrit autrement. On sait (**) que

$$\alpha=\sum_0^{\infty}\varphi_i(n)(-q)^n=1-\sum_1^{\infty}\varphi_i(n)(-1)^{n-1}q^n,$$

$\varphi_i(n)$ représentant *le nombre des décompositions de*

(*) *Recherches sur quelques produits*... (p. 1 et 2).

(**) *Recherches*..., p. 4.

n, *en parties impaires, inégales*; par conséquent,

$$\frac{q}{1+q} + \frac{q^2}{(1+q)(1-q^2)} + \frac{q^3}{(1+q)(1+q^2)(1-q^3)} + \ldots$$
$$= \sum_1^\infty \varphi(n)(-1)^{n-1} q^n.$$

Il est clair que l'on pourrait indéfiniment multiplier ces applications.

P. S. En lisant l'énoncé de la *question* 1181, il m'avait semblé avoir déjà vu le théorème qu'il exprime. En effet, ce théorème est compris dans une transformation générale, due à Stern, et publiée dans les *Nouvelles Annales* (1re série, t. VI, p. 438).

NOTE SUR LE SYSTÈME ARTICULÉ DE M. PEAUCELLIER (*);

PAR M. G. THIÉBAUT,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

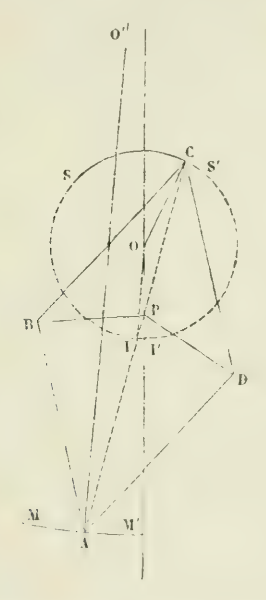
Avant d'entrer en matière, je crois devoir rappeler, en quelques mots, en quoi consiste le système de M. Peaucellier :

ABCD est un losange articulé;
P un point fixe situé sur sa diagonale AC;
BP, DP deux bielles reliant ce point par articulations aux sommets B et D;
OC une manivelle mobile autour d'un centre O et dont le bouton est articulé au sommet C.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques* de M. GERONO, février 1873. *Journal de Physique* de M. D'ALMEIDA, avril 1873. *Mémorial de l'officier du Génie*, nos 23 et 25. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1er semestre 1873, p. 802 et 1470.

A décrit un arc de circonférence MAM′ de rayon AO′ d'autant plus grand (jusqu'à l'infini) que OP diffère moins (jusqu'à zéro) de OC.

Cela posé, si l'on considère le second point I où la diagonale AC coupe la circonférence de la manivelle motrice OC, *le rayon* AO′ *de la transformée* MAM′ *est parallèle au rayon* OI *de la primitive* SCS′.



En effet, on sait que le rayon vecteur PA est *réciproque* du rayon vecteur PC, c'est-à-dire que l'on a

$$PA = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{BP}^2}{PC}.$$

Cela tient, comme on sait, à ce que les trois points C, P et A sont également distants des deux points B et D, et, par conséquent, en ligne droite; et à ce que la

sécante CPA, dans le cercle de centre (mobile) B, et de rayon *constant* BC ou BA, passe par un point (fixe) P situé dans l'intérieur de ce cercle à une distance *constante* BP du centre.

D'un autre côté, dans la circonférence (O, OC), le rayon vecteur PI est *aussi réciproque*, pour les mêmes raisons, du même rayon vecteur PC, c'est-à-dire qu'on a

$$PI = \frac{\overline{OC}^2 - \overline{OP}^2}{PC}.$$

Le rayon vecteur PA de la transformée est donc *proportionnel* au petit rayon vecteur PI de la primitive dans le rapport

$$\frac{\overline{BC}^2 - \overline{BP}^2}{\overline{OC}^2 - \overline{OP}^2};$$

d'où il suit que la transformée, par rayons vecteurs *réciproques*, du segment supérieur SS′ de la primitive autour du point P, considéré comme *pôle d'inversion*, est aussi la transformée, par rayons vecteurs *proportionnels*, du segment inférieur II′ de cette primitive; et que le point P est en même temps un *centre de similitude*.

Il en résulte le parallélisme des rayons AO′ et OI, ce qui démontre la proposition énoncée.

Cela donne aussi une nouvelle démonstration de la propriété fondamentale, rappelée ci-dessus, du losange articulé de M. Peaucellier, à savoir que la transformée est une circonférence.

On peut appliquer la nouvelle propriété qui fait l'objet de la présente Note à la mesure, avec quelque précision (suivant la grandeur du rayon du limbe), des petits angles qu'on ne peut *répéter*.

Il suffit, pour cela, de fixer une lunette à réticule sur le rayon OI de la primitive, et de lire l'arc sur la trans-

formée considérée comme limbe. Le rayon OI est conduit par une coulisse glissant sur la diagonale PA. Le point A, lui-même, de cette diagonale, se meut à coulisse sur la tige rigide qui forme cette diagonale.

SOLUTION D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. REALIS

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 298);

PAR M. KOEHLER.

Dans toute équation du troisième degré dont les racines sont a, b, c, les différences $a-b$, $b-c$, $c-a$ s'expriment toujours en fonction rationnelle de l'une d'elles et des coefficients.

Voici un calcul très-simple et très-élémentaire qui conduit à la proposition ci-dessus, pour l'équation complète au moyen d'une division algébrique. Soit

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

l'équation complète; soient δ, δ', δ'' les trois différences $a-b$, $b-c$, $c-a$; on a d'abord

$$\delta'+\delta''=-\delta,$$

$$\begin{aligned}\delta'\delta'' &= bc-c^2-ab+ac\\ &=(bc+ca+ab)-(a^2+b^2+c^2)+(a-b)^2\\ &=3q-p^2+\delta^2,\end{aligned}$$

de sorte que δ' et δ'' sont données par la formule

$$\Delta=-\frac{\delta}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4p^2-12q-3\delta^2}.$$

L'équation au carré des différences est, comme on sait,

$$\Delta^6 - 2\Delta^4(p^2 - 3q) + \Delta^2(p^2 - 3q)^2 + 4p^3r - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2 = 0,$$

ou abréviativement

$$\Delta^6 - 2M\Delta^4 + M^2\Delta^2 + N = 0.$$

En divisant le triple du premier membre de cette équation par la quantité soumise au radical dans l'expression ci-dessus de Δ, c'est-à-dire par $-3\Delta^2 + 4M$, on trouve pour quotient $-\left(\Delta^2 - \frac{M}{3}\right)^2$ et pour reste $\frac{4M^3}{9} + 3N$. On a donc la relation

$$-(4M - 3\Delta^2)\left(\Delta^2 - \frac{M}{3}\right)^2 + \frac{4M^3}{9} + 3N = 0,$$

et, comme

$$\frac{4M^3}{9} + 4N = \frac{4}{9}p^6 + 9p^2q^2 + 81r^2 - 4p^4q + 12p^3r - 54pqr = \left(\frac{2}{3}p^3 - 3pq + 9r\right)^2,$$

il vient, en définitive,

$$\Delta = -\frac{\delta}{2} \pm \frac{\frac{2}{3}p^3 - 3pq + 9r}{2\left(\delta^2 + q - \frac{p^2}{3}\right)}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

En faisant $p = 0$, on retrouve l'expression donnée par M. Réalis pour l'équation du troisième degré sans second terme.

THÉORÈME PROPOSÉ PAR M. DESBOVES

(voir 2e série, t. XVI, p. 229);

DÉMONSTRATION DE M. MORET-BLANC.

Si dans un quadrilatère ABCD, *dont on désigne les côtés* AB, BC, CD, DA *et les diagonales* AC, BD *par* a, b, c, d, e, f, *on a*

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}, \tag{1}$$

on a aussi nécessairement l'une des deux relations suivantes :

$$ef = ac + bd, \tag{2}$$

$$\left\{\begin{aligned} &(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ef + ac + bd) \\ &\qquad - 2(ab + cd)(ad + bc) = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et réciproquement l'une ou l'autre des équations (2) *et* (3) *entraîne nécessairement l'équation* (1).

Cherchons la relation qui doit exister entre les côtés et les diagonales d'un quadrilatère : il y en a nécessairement une, car le nombre des conditions nécessaires pour déterminer un polygone de n côtés étant $2n - 3$, c'est cinq pour le quadrilatère.

J'appelle α et β les angles BAC et CAD. Les triangles BAC, CAD et BAD donnent

$$b^2 = a^2 + e^2 - 2ae\cos\alpha,$$

$$c^2 = d^2 + e^2 - 2de\cos\beta,$$

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A;$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 + e^2}{2ae},$$

$$\cos\beta = \frac{d^2 - c^2 + e^2}{2de},$$

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad}.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\ \sin^2(\alpha+\beta) &= \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta\\ &\quad + 2\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha\cos\beta\\ &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos A = 1 - \cos^2 A,\end{aligned}$$

d'où

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2 A - 2\cos\alpha\cos\beta\cos A = 1,$$

et, en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos A$ par leurs valeurs et chassant les dénominateurs,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & e^4 f^2 + e^2 f^4 + e^2 f^2 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\\ &\quad + e^2 (a^2 b^2 + c^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2)\\ &\quad + f^2 (b^2 c^2 + a^2 d^2 - a^2 c^2 - b^2 d^2)\\ &\quad + (a^4 c^2 + a^2 c^4 + b^4 d^2 + b^2 d^4)\\ &\quad - (a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2) = 0,\end{aligned}\right.$$

relation qui peut s'écrire

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & (ac + bd - ef)\\ & [(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ac + bd + ef)\\ &\qquad\qquad - 2(ab + cd)(ad + bc)]\\ &\qquad + [e(ab + cd) - f(ad + bc)]^2 = 0,\end{aligned}\right.$$

ce qui démontre le théorème et sa réciproque.

Note du rédacteur. — Quand le quadrilatère ABCD est *convexe*, l'égalité (1) entraîne l'égalité (2), et inversement. (G.)

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES FIGURES HOMOGRAPHIQUES DANS L'ESPACE ;

Par M. E. DEWULF,
Commandant du Génie.

On sait que, quand deux figures homographiques sont placées d'une manière quelconque dans l'espace, elles ont toujours quatre points correspondants communs; c'est-à-dire qu'il existe quatre points réels ou imaginaires, qui, étant considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs correspondants dans la seconde.

Ce théorème a été démontré théoriquement, dans les *Nouvelles Annales*, par M. de Jonquières (1re série, t. XVII, 1858, p. 52); mais je pense que la démonstration de ce géomètre peut être rendue plus élémentaire : le lecteur verra si je me trompe.

Désignons par F et F′ les deux figures homographiques; par a et a' deux droites correspondantes : il résulte immédiatement de la définition des figures homographiques qu'à un faisceau de plans passant par a il correspond un faisceau projectif de plans passant par a', et l'on sait que le lieu de l'intersection des plans correspondants des deux faisceaux projectifs est un hyperboloïde $[a, a']$.

Cela posé, soit M un point correspondant commun aux figures F et F′, ce point appartiendra évidemment aux surfaces du second degré $[a, a']$, quelles que soient les droites correspondantes a et a'.

Considérons trois droites a_1, a_2, a_3 de la figure F, situées dans un même plan α et se coupant en un même

point A; à ces droites correspondront dans F' trois autres droites a'_1, a'_2, a'_3 situées dans un plan α' correspondant à α, et se coupant en un point A' qui correspond à A. Les points correspondants communs à F et à F' se trouvent au nombre des points d'intersection des trois quadriques $[a_1, a'_1]$, $[a_2, a'_2]$, $[a_3, a'_3]$.

Or les quadriques $[a_1, a'_1]$, $[a_2, a'_2]$ ont deux génératrices communes, les droites AA' et $\alpha\alpha'$ non situées dans un même plan, comme il est facile de le voir; elles se coupent donc suivant deux autres droites p et q non situées dans un même plan et formant avec les deux premières un quadrilatère gauche. Les droites AA' et $\alpha\alpha'$ appartiennent aussi à la quadrique $[a_3, a'_3]$, qui coupera les côtés p et q du quadrilatère gauche en quatre points P_1, P_2 et Q_1, Q_2. L'intersection complète des trois quadriques se compose donc des droites AA', $\alpha\alpha'$ et des points P_1, P_2, Q_1, Q_2.

Les plans $a_1 P_1, a'_1 P_1$ sont correspondants, puisque le point P_1 appartient à la quadrique $[a_1, a'_1]$; les plans $a_2 P_1, a'_2 P_1$ et $a_3 P_1, a'_3 P_1$ sont aussi correspondants pour la même raison. Donc le point P_1, considéré comme déterminé par l'intersection des trois plans $a_1 P_1, a_2 P_1, a_3 P_1$ de F, a pour correspondant le même point P_1 de F', donné par les trois plans $a'_1 P_1, a'_2 P_1, a'_3 P_1$.

Le même raisonnement peut s'appliquer aux points P_2, Q_1 et Q_2; ce qui démontre que deux figures homographiques dans l'espace ont toujours quatre points correspondants communs; on sait d'ailleurs qu'elles ne peuvent en avoir un plus grand nombre sans se confondre.

Cette démonstration nous donne les conséquences suivantes : le quadrilatère gauche, intersection des deux quadriques $[a_1, a'_1]$, $[a_2, a'_2]$, a toujours deux côtés réels, les droites AA', $\alpha\alpha'$; par conséquent, les deux autres côtés

p et q sont aussi réels; donc les quatre points correspondants communs aux deux figures homographiques, qui sont réels ou imaginaires suivant que la quadrique $[a_3, a'_3]$ coupe ou ne coupe pas les droites p et q, sont toujours situés sur deux droites réelles. Le théorème fondamental dont nous nous occupons peut donc être énoncé sous la forme suivante, plus complète que celle que l'on donne ordinairement :

Deux figures homographiques dans l'espace ont, en général, quatre points correspondants communs. Si les quatre points sont réels, ils forment un tétraèdre réel. Si deux points seulement sont réels, le tétraèdre a deux faces réelles qui passent chacune par un des points réels, et dont l'intersection est la ligne de jonction, toujours réelle, des deux points imaginaires. Si les quatre points sont imaginaires, les faces du tétraèdre le sont aussi, mais il y a toujours deux arêtes de ce tétraèdre qui sont réelles. Sur chacune de ces arêtes se trouvent deux points imaginaires conjugués et, par chacune d'elles, passent deux plans imaginaires conjugués. Le nombre des points réels est toujours égal à celui des plans réels.

Cet énoncé a été donné par M. Schoute, jeune géomètre hollandais, dans une intéressante étude sur l'homographie, mais il a établi le théorème par des considérations analytiques (*).

(*) *Homographie, en hare toepassing op de theorie der opperrlak. Ken den tweeden graad.* Leyden, 1870, pages 18 et 19.

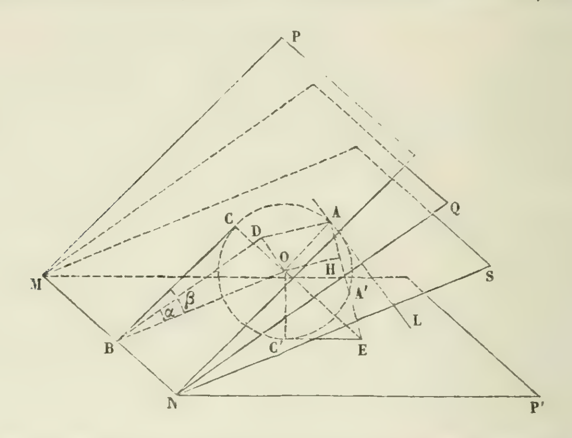
QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS GÉNÉRAL DE 1877,

POUR LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

SOLUTION DE M. HENRI BERGSON,

Élève du lycée Fontanes (*).

Étant donnés deux plans P *et* P′ *et un point* A *en dehors de ces deux plans, on considère toutes les sphères*



qui passent par le point A, *et qui sont tangentes aux deux plans donnés :*

1° *Trouver le lieu de la droite qui joint le point* A *au centre de la sphère variable ;*

2° *Trouver le lieu du point où cette sphère touche l'un des plans.*

I. Soient P et P′ les deux plans, MN leur intersection, O le centre d'une des sphères passant par le point

(*) M. Henri Bergson a obtenu le premier prix.

A et tangentes aux deux plans; C et C′ les points de contact de cette sphère avec les deux plans; Q le plan passant par le point A et la droite MN. Proposons-nous de trouver le lieu de la droite AO.

Remarquons d'abord que le point O, équidistant des plans P et P′, est situé dans le plan bissecteur S du dièdre PMNP′. Cela posé, abaissons sur le plan Q la perpendiculaire OD, et sur la droite MN la perpendiculaire OB; puis tirons les droites BD, BC, OC, OA, AD. Les droites BD et BC étant, d'après un théorème connu, perpendiculaires sur MN, les angles OBD, OBC mesurent respectivement les deux dièdres SMNQ, SMNP, et, par suite, sont constants. Ces deux angles étant constants, il en est de même des rapports $\frac{OD}{OB}$, $\frac{OC}{OB}$, et, par conséquent, le rapport $\frac{OD}{OC}$, quotient des deux rapports précédents, est constant aussi.

Mais, OC étant égale à OA, le rapport $\frac{OD}{OA}$ est constant. Dès lors, dans le triangle rectangle ODA, le rapport $\frac{OD}{OA}$ étant constant, l'angle OAD l'est aussi, ainsi que son complément OAL, obtenu en élevant sur le plan Q la perpendiculaire AL. L'angle OAL étant constant, le lieu de la droite AO est la surface d'un cône de révolution dont l'axe est AL.

Calcul du demi-angle du cône. — Il est facile de calculer le demi-angle OAL de ce cône. Désignons, en effet, par α et β les deux dièdres SMNQ, SMNP.

On a

$$\cos OAL = \sin OAD = \frac{OD}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{\frac{OD}{OB}}{\frac{OC}{OB}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta};$$

d'où

$$\cos \mathrm{OAL} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$$

Discussion. — Les angles α et β, l'un inférieur, l'autre égal à la moitié du dièdre PMNP′, sont toujours aigus; donc, pour que cosOAL et par suite OAL lui-même existent, il faut qu'on ait $\alpha < \beta$. Cette conséquence pouvait être prévue; car, si α est plus grand que β, le point A est extérieur au dièdre PMNP′, et la sphère O est tangente, non plus à P et à P′, mais à l'un d'eux et au prolongement de l'autre, ou aux prolongements de tous deux.

Si l'on suppose $\alpha = \beta$, on a

$$\cos \mathrm{OAL} = 1,$$

et par conséquent l'angle OAL est nul. Le lieu se réduit donc à la droite AL. Ce résultat pouvait encore être prévu; car, si les angles α et β sont égaux, le point A est contenu dans le plan P, et il n'existe plus qu'une seule sphère passant par le point A et tangente aux deux plans.

Si l'on suppose $\alpha = 0$, on a

$$\cos \mathrm{OAL} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{OAL} = 90^\circ.$$

Le lieu est alors la surface d'un cône dont le demi-angle est un angle droit, c'est-à-dire un plan. Ce résultat pouvait encore s'obtenir *a priori*, car, si l'angle α est nul, le point A est situé dans le plan bissecteur S, et toutes les droites AO sont contenues dans ce plan.

Généralisation du problème. — Dans le problème précédent, on a supposé que la sphère variable était tangente aux deux plans donnés, ou, en d'autres termes, faisait avec ces deux plans des angles nuls. On peut généraliser la question et supposer que la sphère variable,

au lieu de faire avec les deux plans des angles nuls, coupe ces deux plans sous des angles déterminés. Je dis que le lieu de la droite AO est encore, dans ce cas, un cône ayant pour axe la droite AL.

En effet, soit O le centre de l'une des sphères considérées. Désignons par r son rayon, et par p, p', q les distances respectives du point O aux trois plans P, P', Q. La sphère coupant les deux plans sous des angles déterminés, on voit facilement que les rapports $\frac{p}{r}$, $\frac{p'}{r}$, et par suite leur quotient $\frac{p}{p'}$, sont constants. Le rapport $\frac{p}{p'}$ étant déterminé, le point O, d'après un théorème connu, est situé dans un plan déterminé S passant par MN. Dès lors, les trois plans P, Q, S se coupant suivant une même droite MN, on sait que le rapport des distances d'un point quelconque du plan S aux deux autres plans est constant. Donc le rapport $\frac{p}{q}$ est constant ; et, comme le rapport $\frac{p}{r}$, ainsi qu'on l'a vu, est constant aussi, il en est de même du quotient $\frac{q}{r}$ de ces deux rapports. Ainsi, dans le triangle rectangle ODA, le rapport $\frac{q}{r}$, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}}$, est déterminé, et par suite l'angle OAD et son complément OAL sont constants. Le lieu de la droite AO est donc encore un cône de révolution ayant pour axe AL.

II. Proposons-nous maintenant de trouver le lieu du point de contact C' de la sphère O avec le plan P'.

Abaissons du point A, sur le plan bissecteur S, la perpendiculaire AH, qui coupe le plan S en H, et le plan P' en E ; puis tirons les droites OH, OE, OC', EC', et dé-

signons par A′ le point où AH coupe la sphère O. Les triangles OAH, OA′H étant évidemment égaux, le point A′ est le symétrique du point A par rapport au plan S ; donc ce point A′ est fixe. Or la droite EC′ étant tangente à la sphère, on a

$$\overline{EC'}^2 = EA \times EA' = \text{const.}$$

La droite EC′ étant constante, le lieu du point C′ est une circonférence dont le centre est E et le rayon EC′.

Calcul du rayon. — On a évidemment

$$\overline{EC'}^2 = \overline{EO}^2 - \overline{OC'}^2 = \overline{EO}^2 - \overline{OA}^2.$$

D'autre part, la droite AH, perpendiculaire au plan S, l'est aussi à la droite OH. On a donc

$$\overline{EO}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{EH}^2 - \overline{AH}^2$$

d'où

$$\overline{EC'}^2 = \overline{EH}^2 - \overline{AH}^2.$$

Discussion. — La formule précédente montre que EH doit être plus grande que AH ; ce que l'on pouvait prévoir, puisque, dans le cas contraire, le point A serait extérieur au dièdre.

Si l'on suppose EH = AH, la droite EC′ devient nulle, et le cercle se réduit à un point. En effet, si les lignes EH et AH sont égales, le point A est dans le plan P, et il n'existe qu'une seule sphère passant par le point A et tangente aux deux plans.

Si l'on suppose AH = o, on a EC′ = EH ; ce qui était évident *a priori,* car alors le point A est situé dans le plan bissecteur S, et les deux droites EC′, EH sont tangentes à la sphère.

III. Des propositions précédentes on peut tirer diverses conséquences.

1. Remarquons d'abord que le point O, équidistant du point A et du plan P, se trouve situé sur un paraboloïde de révolution ayant le point A pour foyer et le plan P pour plan directeur. Pour la même raison, il est situé sur un paraboloïde dont le foyer est A et dont le plan directeur est P′. Enfin le point O est contenu dans le plan S. Le lieu du point O peut donc être défini, soit par l'intersection d'un plan et d'un paraboloïde, soit par l'intersection de deux paraboloïdes.

Or, le point O étant situé sur la droite OC′, le lieu de ce point est situé sur la surface d'un cylindre droit dont la base est un cercle ayant E pour centre et EC′ pour rayon ; donc le lieu du point O, intersection d'un cylindre et d'un plan, est une ellipse.

De là les deux théorèmes suivants :

1° *L'intersection d'un paraboloïde par un plan est une ellipse.*

2° *L'intersection de deux paraboloïdes ayant même foyer est une ellipse.*

D'autre part, on a vu que le lieu de la droite AO est un cône de révolution ; de là ce troisième théorème :

3° *Si l'on coupe un paraboloïde par un plan, le cône qui a pour base la section et pour sommet le foyer est un cône de révolution.*

Enfin on sait que le lieu du point C, projection du point O, est un cercle ; d'où ce quatrième théorème :

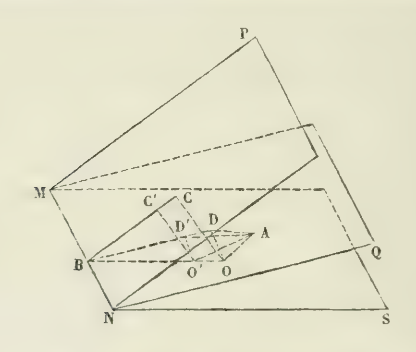
4° *Si l'on coupe un paraboloïde par un plan, la projection de la section sur un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle.*

2. Prenons, maintenant, pour origine un point quelconque de l'espace, et transformons par rayons vecteurs réciproques la figure considérée. Les deux plans P et P′

deviennent deux sphères, et la sphère O est encore une sphère nouvelle variable, passant par le point A et tangente aux deux autres. D'autre part, la circonférence ayant E pour centre, et EC′ pour rayon, devient une circonférence tracée sur la sphère réciproque du plan P′. On voit donc que, si les plans P et P′ sont remplacés par des sphères, le lieu du point C′ est encore une circonférence.

Si l'on suppose le centre d'inversion choisi dans l'un des plans P et P′, on voit que la solution reste la même quand un seul des plans donnés est remplacé par une sphère.

Enfin, si l'on prend pour centre d'inversion le point A,



les plans P et P′ deviennent des sphères, et les sphères O des plans ; d'où ce théorème bien connu :

Si l'on mène des plans tangents à la fois à deux sphères données, le lieu des points de contact de ces plans avec chacune des sphères est un cercle.

IV. — *Autres solutions des questions proposées.*

1° *Proposons-nous d'abord de trouver le lieu de la droite.*

Tous les points O doivent satisfaire à la condition

d'être équidistants du point A et du plan P ; ils sont de plus contenus dans le plan S. Considérons deux points O et O' du plan S satisfaisant à cette condition ; tirons les droites AO, AO', et abaissons sur le plan P les perpendiculaires OC, O'C', et sur le plan Q les perpendiculaires OD, O'D' ; puis menons les trois droites OO', CC', DD', qui aboutissent toutes trois au point B de la droite MN. On a

$$\frac{OD}{O'D'} = \frac{OB}{O'B'} = \frac{OC}{O'C'};$$

et, comme on a $OC = OA$, et $O'C' = O'A$, on en déduit

$$\frac{OD}{O'D'} = \frac{OA}{O'A} \quad \text{ou} \quad \frac{OD}{OA} = \frac{O'D'}{O'A}.$$

Dès lors, si l'on tire AD et AD', les deux triangles rectangles ADO, AD'O' sont semblables ; donc les angles OAD, O'AD' que font avec le plan Q les droites AO, AO' sont égaux, et l'on conclut, comme précédemment, que le lieu de AO est un cône de révolution dont l'axe est perpendiculaire au plan Q.

2° *Cherchons, maintenant, le lieu du point de contact de la sphère variable avec l'un des deux plans.*

D'après le théorème de Dupuis, si une sphère variable est tangente à trois sphères données, le lieu du point de contact de la sphère variable avec chacune des trois autres est une circonférence.

Supposons que l'une des trois sphères fixes se réduise à un point et que les deux autres sphères se coupent : le théorème subsiste encore. Cela posé, transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour origine un des points de l'intersection des deux sphères. Le point donné devient alors un point A ; les deux

sphères deviennent deux plans P et P'. D'ailleurs, le lieu des points de contact de chacun de ces plans avec la sphère variable est encore une circonférence. Le problème est donc résolu.

AGRÉGATION DES LYCÉES (CONCOURS DE 1877).

ORDRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMPOSITION DU 8 AOUT.

Mathématiques spéciales.

On donne un ellipsoïde et un point A :

1° Trouver un point B tel que, en menant par ce point un plan *quelconque* P, la droite AB soit toujours l'un des axes du cône qui a pour sommet le point A, et pour base la section de l'ellipsoïde par le plan P;

2° Le problème a, en général, trois solutions : trouver pour quelles positions du point A le nombre des solutions devient infini ;

3° Le point A restant fixe, on suppose que l'ellipsoïde se déforme de façon que les trois sections principales conservent les mêmes foyers, et l'on demande le lieu que décrit alors le point B.

COMPOSITION DU 9 AOUT.

I. — *Mathématiques élémentaires.*

Une droite AB de longueur donnée tourne autour de son milieu O, supposé fixe, de façon que les rapports

$\frac{AC}{AD}$, $\frac{BC}{BD}$ des distances de ses extrémités A et B à deux points fixes C et D soient toujours égaux entre eux : trouver le lieu engendré par cette droite AB.

II. — *Mécanique élémentaire.*

Deux poids P et P′ sont assujettis à se mouvoir sur deux plans inclinés dont l'intersection est horizontale; ces deux poids s'attirent proportionnellement à leurs masses et à une puissance connue de leur distance mutuelle : trouver leur position d'équilibre.

Étudier le même problème en tenant compte du frottement que l'on suppose le même pour les deux plans inclinés. (*On négligera les dimensions des deux poids.*)

COMPOSITION DU 10 AOUT.

Question de méthode et d'histoire des Mathématiques.

Exposer la marche à suivre pour trouver l'équation d'un lieu géométrique, en Géométrie plane. — Choisir des exemples propres à faire comprendre la méthode et à mettre en évidence les particularités les plus remarquables que l'on peut rencontrer dans cette recherche.

COMPOSITION DU 25 AOUT.

Sur les matières de la licence.

Étudier le mouvement des deux points pesants μ et m qui s'attirent proportionnellement à leur masse et à leur distance : le point μ est assujetti à rester sur une verticale Oz, et le point m à rester sur un plan horizontal qui tourne uniformément autour de la verticale Oz.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (ANNÉE 1877).

Leçons de Mathématiques spéciales.

1° Théorie des plans diamétraux et des diamètres dans les surfaces du second degré.

2° Règle des signes de Descartes.

3° Théorème de Rolle. — Application à la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

4° Théorème des projections. — Application à la transformation des coordonnées dans l'espace.

5° Tangentes et asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées polaires.

6° Exposer les méthodes principales qui permettent de reconnaître la nature d'une surface du second ordre, donnée par une équation à coefficients numériques.

7° $\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ lorsque m devient infini.

8° Théorème de Sturm. — Usages de ce théorème.

9° Transformation des équations. — Exemples.

10° Discussion de courbes en coordonnées polaires.

11° Approximation des racines (méthode de Newton).

12° Sections circulaires dans les surfaces du second ordre. — Cas où la surface est rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires quelconques.

13° Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la section a des branches infinies.

14° Réduction de l'équation générale du second ordre à trois variables à ses formes les plus simples (coordonnées rectangulaires).

15° Intersection de deux courbes du second degré. —

Solution au moyen d'une équation du troisième degré. — Discussion.

16° Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes.

17° Étude de la fonction exponentielle a^x. — Des logarithmes considérés comme exposants.

Leçons de Mathématiques élémentaires.

1° Divisibilité. — Caractères de divisibilité par 2, 5, 4, 25, 9, 3, 11.

2° Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales. — Fractions périodiques.

3° Première leçon sur la mesure des surfaces.

4° Formules pour la résolution des triangles.

5° Volume de la sphère. — Théorèmes qui y conduisent.

6° Maximum et minimum de $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

7° Racine carrée (Arithmétique).

8° Plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres entiers. — Plus petit commun multiple.

9° Première leçon de Géométrie descriptive.

10° Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

11° Première leçon de Trigonométrie.

12° Première leçon de cosmographie.

13° Multiplication algébrique.

14° Première leçon sur la mesure des volumes.

15° Mesure des angles.

16° Résolution et discussion du système d'équations

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

Géométrie descriptive.

Étant donnés un paraboloïde de révolution P dont l'axe est vertical, et une droite D qui rencontre cet axe, on coupe la surface P par des plans horizontaux, et l'on transporte chaque section dans son plan, de manière que son centre vienne se placer sur la droite D : on obtient ainsi une surface S.

Cela posé, on demande :

1° De mener le plan tangent à la surface S en un point de cette surface dont la projection verticale m' est donnée ;

2° De construire l'intersection des surfaces P et S.

Données. — Le sommet du paraboloïde P est à 7 centimètres en avant de la ligne de terre (on le placera à 10 ou 12 centimètres du bord *droit* de la feuille.)

Le foyer de la parabole méridienne est à 1 centimètre au-dessus du sommet.

La droite D est parallèle au plan vertical ; sa trace horizontale est à 7 centimètres en avant de la ligne de terre, et à 5 centimètres à gauche du sommet du paraboloïde P. Sa projection verticale fait un angle de 60 degrés avec la partie droite de la ligne de terre.

Le point m' est à 9 centimètres au-dessus de la ligne de terre, et à 45 millimètres à gauche de la projection verticale de l'axe du paraboloïde.

Épreuve pratique de calcul.

Sachant que le polynôme

$$y^3 + 1,7\,xy^2 - 2,25\,x^2y - 3,825\,x^3 + 2y^2 + 3xy + 0,6\,x^2 - y + 4,3\,x - 2$$

est décomposable en facteurs du premier degré, on demande d'opérer cette décomposition.

CORRESPONDANCE.

1. Nous avons reçu de M. G. Chambon une Note intitulée :

Lieu des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère. — Conique des neuf points.

Dans cette Note il est démontré que le lieu géométrique des centres des coniques circonscrites à un quadrilatère donné ABCD est une ligne du second degré qui passe :

1° Par les trois points où se coupent deux à deux les côtés opposés et les diagonales du quadrilatère ;

2° Par les six points milieux des côtés et des diagonales.

C'est à cause de ces propriétés que l'auteur de la Note, considérant un triangle ABC, déterminé par trois des sommets du quadrilatère, nomme *conique* des neuf points de ce triangle, le lieu géométrique dont il s'agit.

Lorsque le quatrième sommet D, du quadrilatère coïncide avec le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC, l'équation de la conique devient celle d'une circonférence, et l'on retrouve ainsi, comme cas particulier, une proposition bien connue sous la dénomination de *la circonférence des neuf points.*

2. MM. Félix Sautreaux et Dunoyer nous ont adressé, successivement, d'intéressantes recherches sur le théorème de Pascal. Ce théorème a été, comme on sait, démontré de différentes manières, en le déduisant de différentes propositions de Géométrie plane auxquelles correspondent, dans l'espace, des propositions analogues. En voici un exemple très-simple, qui se trouve dans le travail de M. Sautreaux.

Si trois coniques ont une corde commune, les trois autres cordes d'intersection concourent au même point.

Si trois surfaces du second ordre ont une conique commune, les plans des trois autres coniques d'intersection passent par une même droite.

3. Les deux questions de Géométrie analytique, proposées au concours d'admission à l'École Centrale (voir t. XVII, p. 200 et 203), ont été résolues par M. Y. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger; et la question de Mathématiques spéciales du concours général, par M. Barbarin.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Traité de Géométrie analytique, précédé des *Éléments de la Trigonométrie rectiligne et de la Trigonométrie sphérique,* par *A. Boset,* ingénieur honoraire des Mines, candidat ès sciences physiques et mathématiques, professeur de Mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Namur. — Bruxelles, Gustave Mayolez, libraire-éditeur, rue de l'Impératrice, 13; Paris, Gauthier-Villars, libraire, quai des Grands-Augustins, 55 (1878). Un volume in-8 de 700 pages. Prix : 12 fr.

L'Ouvrage est divisé en deux Parties; la première comprend les éléments des deux trigonométries et leurs applications à la résolution de divers problèmes importants, qui n'ont pas été résolus dans plusieurs autres Traités de Trigonométrie. Nous avons, par exemple, remarqué la formule qui donne le volume d'un tétraèdre en fonction des six arêtes.

La seconde Partie est un Traité, des plus complets, de Géométrie analytique plane. On y trouve un grand nombre d'exercices bien choisis, les démonstrations de plusieurs propriétés peu connues et utiles pour la construction des courbes du second degré. — Une théorie nouvelle des asymptotes, que l'auteur considère comme des tangentes dont les points de contact sont *à l'infini*. Les théories générales des foyers et *circonférences focales;* des diamètres et diamètres conjugués. — Systèmes homographiques. — Courbes enveloppes. — Polaires réciproques. — Coniques rapportées aux côtés d'un triangle *autopolaire*. — Invariants, covariants. — Homothétie..... Toutes ces théories et propositions sont exposées avec ordre et clarté.

L'ouvrage de M. Boset nous semble appelé à un grand succès; il peut, certainement, être recommandé aux étudiants et aux professeurs.

2. Sulla cinematica di un corpo solido. Nota del S. C. Prof. Giuseppe Bardelli.

Letta nell'adunanza del 28 marzo 1878 del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.

Milano, coi tipi di G. Bernardoni (1878).

3. *Greek Geometry, from Thales to Euclid, by George Johnston, Allman, II.* D., professor of Mathematics, and Member of the senate, of the Queen's University in Ireland.

Dublin, printed at the University press, by Ponsonby and Murphy (1877).

4. *Grundlagen der Ikonognosie. Mit Berücksichtigung ihres Verhältnisses zu anderen exacten Wissenschaften, insbesondere zur « Géométrie descriptive »*

von Franz Tilšer, Professor am K. K. böhmischen polytechnikum in Prag. I. Abtheilung. Mit 5 lithogr. Tafeln. (Aus den Abhandlungen der k. Böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. vi. Folge. 9. Band) (Mathem. naturwiss. — Classe n° 3.)

Prag. Verlag der kön. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften; Druck von Dr. Ed. Grégr. (1878.)

Théorie mathématique des opérations financières; par M. *Hippolyte Charlon*. 2e édition; Paris, Gauthier-Villars, 1878. Grand in-8°. Prix : 12fr50.

L'auteur, dans cette seconde édition de la *Théorie mathématique des opérations financières*, s'est efforcé d'en rendre la lecture facile aux personnes qui ne connaissent que les notions les plus élémentaires de l'Algèbre. Les démonstrations qui exigent une connaissance approfondie des procédés algébriques ont été reléguées dans des Notes placées à la fin de l'Ouvrage.

Il a ajouté considérablement au texte et aux Tables de la première édition, publiée en 1869.

Des lois édictées en 1872 et 1875 ont frappé les obligations de trois taxes qui, modifiant leur valeur, ont apporté des complications nouvelles dans tous les problèmes qui les concernent. Le lecteur verra avec intérêt les procédés simples et ingénieux inventés par M. Achard pour triompher de ces complications.

L'auteur a pensé que les Théories des *Opérations de Bourse* et de *Change*, ainsi que celle de la *Comptabilité*, se rattachaient naturellement à son sujet : aidé par MM. Jay, Baudesson de Richebourg et Tricart, il a consacré trois Chapitres à leur exposition.

Il a ajouté aux *Tables logarithmiques* de Fédor Thoman, qui accompagnaient la première édition, des Tables numériques relatives aux obligations de chemins de fer et aux calculs d'intérêts composés et d'annuités.

Ces nouvelles Tables permettent de résoudre, avec le seul secours des opérations élémentaires de l'Arithmétique, les problèmes les plus compliqués de la finance, et notamment ceux qui concernent les parités des valeurs.

Voici d'ailleurs le contenu des différents Chapitres :

Chapitre I. — Intérêt simple et composé. Escompte. Échéance commune. Échéance moyenne.

Chap. II. — Rentes. Perpétuités. Rentes limitées.

Chap. III. — Emprunts remboursables par des rentes à termes constants. Évaluation, d'après un taux d'intérêt quelconque, de la nue propriété des titres d'un emprunt, de leur jouissance et de ces titres eux-mêmes.

Chap. IV. — Emprunts par obligations. Évaluation, d'après un taux d'intérêt quelconque, de la nue propriété des obligations d'un emprunt, de leur jouissance et de ces obligations elles-mêmes.

Chap. V. — Rentes dont les termes varient en progression géométrique. Emprunts remboursables par des rentes dont les termes forment une progression géométrique. Rentes dont les termes varient en progression arithmétique. Emprunts remboursables par des rentes dont les termes varient en progression arithmétique.

Chap. VI. — Fonds publics français. Opérations du Crédit foncier de France.

Chap. VII. — Définition de la parité des valeurs. Recherche du taux correspondant au prix d'une rente. Évaluation de l'influence des taxes sur la valeur des obligations. Recherche du taux d'intérêt correspondant au prix d'une obligation frappée des trois taxes. Exemples de calculs de parités.

Chap. VIII. — Définition de la Bourse, son rôle dans la physiologie sociale. Historique des opérations de Bourse proprement dites. Des usages de place à la Bourse de Paris.

Chap. IX. — Du change. De la lettre de change. Des cotes. Des arbitrages. Arbitrages de fonds publics. Arbitrages des matières d'or et d'argent.

Chap. X. — Définition et origine de la comptabilité. Enregistrement et classification des faits commerciaux. Des deux principales méthodes de comptabilité. Des livres de commerce. De la balance. De l'inventaire ou bilan. Applications. Tenue des livres de la maison Pierre et Cie. Ouverture et clôture des écritures d'une maison de commerce.

Théorie des intérêts composés et des annuités, suivie de Tables logarithmiques; par *Fédor Thoman*. Ouvrage traduit de l'anglais par M. l'abbé *Bouchard*, et précédé d'un Avertissement de M. *J. Bertrand*. Paris, Gauthier-Villars, 1878. Grand in-8°. Prix : 10 francs.

La première édition de cet Ouvrage a paru en anglais, et a été imprimée aux frais de l'Université. Elle a obtenu, dit M. Bertrand, tout le succès auquel puisse prétendre un Ouvrage de ce genre, celui d'être employé par les hommes pratiques et d'être recherché

comme un guide précieux, presque indispensable pour les opérations de chaque jour.

M. Gauthier-Villars, en donnant au public français la traduction de M. l'abbé Bouchard, rend un véritable service aux calculateurs de notre pays, dont bien peu jusqu'ici ont eu l'occasion de connaître l'édition originale.

Après avoir donné, sous une forme nette et précise, en y joignant leur démonstration, les formules qui résolvent tous les problèmes rencontrés par lui dans sa longue pratique de calculateur des opérations financières, Fédor Thoman les éclaircit par de nombreux exemples, et en simplifie l'emploi de manière à faire disparaître souvent tout travail, par le moyen de deux Tables dont l'usage, très-facile et très-clair, permet de résoudre un grand nombre de problèmes en apparence complétement distincts.

Cette nouvelle édition contient de plus des Tables inédites, dressées de la main même de Fédor Thoman.

La Table I de l'édition anglaise ne donne les logarithmes du montant de 1 franc et de l'annnuité capable d'amortir un capital de 1 franc que pour des périodes de temps inférieures à 100 ans; mais on peut avoir besoin de connaître ces mêmes logarithmes pour des périodes comprises entre 100 et 200 ans, surtout lorsqu'il s'agit du calcul d'annuités où l'intérêt et l'amortissement se payent par semestre, par trimestre ou par mois. Un supplément de 4 pages, faisant suite à la Table I, présente ces logarithmes pour les taux 2, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2}$ et 3 pour 100, et pour des périodes de temps comprises entre 100 et 200 ans.

La Table V contient les logarithmes des nombres naturels de 1 à 100.

Les Tables VI et VII complètent les trois premières Tables.

Enfin les trois Tables de logarithmes à 11 décimales servent à calculer le logarithme d'un nombre donné, ou le nombre correspondant à un logarithme donné, jusqu'à 10 chiffres exacts. Un supplément de quelques pages, placé à la fin de l'Ouvrage, sous le titre de *Tables de logarithmes à* 11 *décimales,* indique la manière de se servir de ces Tables.

QUESTIONS.

1267. *On donne une circonférence dont le centre est* O, *et une droite* α. *On a sur cette droite deux divisions homographiques, dont* A *et* A' *sont deux points correspondants. Par* A *et* A' *on mène des tangentes à la circonférence; elles se coupent en quatre points dont on demande le lieu géométrique.*

Construire la courbe dans le cas particulier où le pied de la perpendiculaire abaissée du point O *sur la droite* α *est le point milieu des deux points doubles imaginaires des divisions homographiques. — Cas particulier où les divisions sont en involution et ont leurs points doubles imaginaires.* (Ed. Dewulf.)

1268. Lieu du point de la tangente à l'épicycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, qui est conjugué harmonique du point de contact par rapport aux axes de coordonnées.

(Gambey.)

1269. Une droite AB de longueur constante s'appuie sur deux axes rectangulaires OX, OY : lieu du point M de cette droite, tel que l'on ait

$$MA.AO = MB.BO.$$

(Gambey.)

1270. On sait que les six normales menées par un point à une surface du second ordre sont sur un même cône du second degré. On propose de trouver le lieu que doit décrire le sommet S de ce cône pour que les différents cônes obtenus admettent les mêmes plans cycliques.

(Gambey).

1271. On donne un plan (P) et une droite fixe (D) qui rencontre le plan en un point O. Par la droite (D) on mène un plan (π) qui coupe (P) suivant une droite Om; on élève sur Om, dans le plan (π), une perpendiculaire Oμ; quel est le lieu de cette perpendiculaire?

(GENTY.)

1272. Dans un tétraèdre dont les faces sont équivalentes :

1° Les faces sont égales;

2° Le centre de gravité coïncide avec les centres des sphères, inscrite et circonscrite, et d'une sphère tangente à la fois aux quatre hauteurs du tétraèdre et aux perpendiculaires menées à chaque face par le point de rencontre de ses hauteurs. (COTTEREAU.)

1273. Si r représente le rayon du cercle inscrit dans un triangle, et p le demi-périmètre, on a $p^2 > 27r^2$.

(D. EDWARDS, *The Education times.*)

1274. Dans toute solution, en nombres entiers, de l'équation indéterminée $24x^2 + 1 = y^2$, le produit xy des valeurs des deux inconnues est multiple de 5.

ÉTUDE SUR LES DÉCOMPOSITIONS EN SOMMES DE DEUX CARRÉS, DU CARRÉ D'UN NOMBRE ENTIER COMPOSÉ DE FACTEURS PREMIERS DE LA FORME $4n+1$, ET DE CE NOMBRE LUI-MÊME.

FORMULES ET APPLICATION A LA RÉSOLUTION COMPLÈTE, EN NOMBRES ENTIERS, DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES, SIMULTANÉES, $y = x^2 + (x+1)^2$ ET $y^2 = z^2 + (z+1)^2$;

(FIN (*).)

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

V. Actuellement, pour passer du système de valeurs de x et de y qu'on vient d'écrire à un autre système du même groupe (E_n) qui nous occupe, il suffit de changer dans l'expression de x, et en même temps dans celle de y, le signe du produit $a_1 b_1$; on obtient ainsi un deuxième système de valeurs. Pour en obtenir un troisième, il suffit de changer le signe du produit $a_2 b_2$ dans les mêmes expressions de x et y, et ainsi de suite pour les suivants. On obtient donc d'abord, en procédant de la sorte, autant de systèmes nouveaux de valeurs de x et de y qu'il y a de produits tels que $a_1 b_1, a_2 b_2$, c'est-à-dire autant qu'il y a de facteurs $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$; donc n.

Cela fait, pour obtenir d'autres valeurs conjuguées de x et de y, il faut changer *à la fois*, dans les deux formules (1), les signes de deux produits tels que $a_1 b_1, a_2 b_2$, et cette opération donne lieu à $\frac{n(n-1)}{2}$ systèmes nouveaux de valeurs correspondantes de x et de y.

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 241.

On continue ces changements de signe, en les faisant porter successivement sur trois, sur quatre, etc., produits (ab) à la fois, jusqu'à ce qu'on soit arrivé à les prendre en nombre inclusivement égal à la moitié du nombre n. Seulement il y a deux cas à considérer, selon que n est pair ou impair.

Lorsque n est pair $(n = 2n')$, il arrive que, dans le dernier groupe de ces permutations, celui où les produits ab sont pris n' à n', les valeurs de x et de y ainsi obtenues se répètent deux fois chacune, de telle sorte que, pour avoir le nombre exact des solutions distinctes ajoutées de ce chef, il ne faut compter que la moitié de celles de ce groupe. D'après cela, le nombre total de ces combinaisons diverses, et par suite celui des systèmes de x et de y, sont donnés par la somme

$$\begin{aligned}1 &+ 2n' + \frac{2n'(2n'-1)}{1.2} + \frac{2n'(2n'-1)(2n'-2)}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{1}{2}\,\frac{2n'(2n'-1)(2n'-2)\ldots(2n'-n'+1)}{1.2.3\ldots n'} \\ &= 2^{2n'-1} = 2^{n-1}.\end{aligned}$$

Lorsque n est impair $(n = 2n'+1)$, la règle générale s'applique sans modification, jusques et y compris le groupe où les facteurs (ab) dont on change à la fois le signe primitif sont pris n' à n', et le nombre total des systèmes de x et de y est égal à

$$\begin{aligned}1 &+ (2n'+1) + \frac{(2n'+1)2n'}{1.2} \\ &+ \frac{(2n'+1)2n'(2n'-1)}{1.2.3} + \ldots \\ &+ \frac{(2n'+1)2n'(2n'-1)\ldots(2n'-n'-2)}{1.2.3\ldots n'} = 2^{2n'} = 2^{n-1},\end{aligned}$$

c'est-à-dire le même que dans l'autre cas, algébriquement parlant.

VI. Quant au nombre N lui-même, sa décomposition en une somme de deux carrés suit la loi suivante.

Si N_2 est le produit $f_1 f_2$ de deux facteurs

$$f_1 = a_1^2 + b_1^2 \quad \text{et} \quad f_2 = a_2^2 + b_2^2,$$

on a

$$N_2 = L_2^2 + P_2^2,$$

où L_2 et P_2 ont pour valeurs types

$$L_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 \quad \text{et} \quad P_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

L'autre décomposition, dont N est susceptible dans ce cas, se déduit de la valeur type qu'on vient d'écrire, en changeant à la fois dans L_2 et dans P_2 le signe de $a_1 b_1$, ou, ce qui revient au même, de b_1 tout seul.

Si N_3 est le produit $f_1 f_2 f_3$ de trois facteurs, c'est-à-dire d'un facteur de plus f_3 ($f_3 = a_3^2 + b_3^2$) que dans le cas précédent, la décomposition est

$$N_3 = L_8^2 + P_3^2,$$

où L_3 et P_3 ont pour valeurs initiales, en fonction de L_2 et de P_2,

$$L_3 = a_3 L_2 - b_3 P_2 \quad \text{et} \quad P_3 = a_3 P_2 + b_2 P_2.$$

Les trois autres décompositions se déduisent de celles-ci, en y changeant successivement et à la fois, dans L_3 et P_3, les signes de b_1, de b_2 et de b_3.

Si N_4 a un facteur de plus ($f_4 = a_4^2 + b_4^2$), la décomposition type est

$$N_4 = L_4^2 + P_4^2,$$

où L_4 et P_4 ont pour valeurs initiales, en fonction de L_3 et P_3,

$$L_4 = a_4 L_3 - b_4 P_3 \quad \text{et} \quad P_4 = a_4 P_3 + b_4 L_3.$$

Les sept autres décompositions dont N_4 est susceptible dans ce cas se déduisent de celle-ci en y changeant successivement, dans L_4 et P_4 à la fois, les signes de b_1, b_2, b_3, b_4, puis de $b_1 b_2$, $b_1 b_3$ et $b_1 b_4$.

En général, si N_n se compose de n facteurs (supposés, comme dans ce qui précède, à la première puissance), le $n^{\text{ième}}$ ayant pour expression $f_n = a_n^2 + b_n^2$, la décomposition type, parmi les 2^{n-1} dont N_n est alors susceptible, est

$$N_n = L_n^2 + P_n^2,$$

où L_n et P_n ont, en fonction de L_{n-1} et P_{n-1}, c'est-à-dire en fonction des valeurs de L et P dans la décomposition type de $\frac{N_n}{f_n} = L_{n-1}^2 + P_{n-1}^2$, les valeurs initiales suivantes :

$$L_n = a_n L_{n-1} - b_n P_{n-1} \quad \text{et} \quad P_n = a_n P_{n-1} + b_n L_{n-1}$$

Les $2^{n-1} - 1$ autres décompositions se déduisent de celle-ci, en y changeant successivement, dans L_n et P_n à la fois, les signes de $b_1, b_2, \ldots, b_n$, pris d'abord un à un, puis deux à deux, puis trois à trois, etc., et enfin n' à n', si $n = 2n' + 1$, et en ne prenant que la moitié du nombre de ces combinaisons n' à n', si $n = 2n'$, comme on l'a déjà dit pour le cas où le nombre à décomposer est N^2.

VII. Les formules des § IV et V donnent lieu à une autre remarque importante.

Toutes les décompositions de N^2, à quelque espèce

qu'elles appartiennent, dérivent de celles de N (lesquelles sont au nombre de 2^{n-1}, toutes différentes entre elles), soit par la formule de décomposition simple

$$(2)\qquad N^2 = (L_i^2 - P_i^2)^2 + \overline{2 L_i P_i}^2,$$

soit par la formule double

$$(3)\qquad N^2 = (L_i L_{i'} \mp P_i P_{i'})^2 + (L_i P_{i'} \pm L_{i'} P_i)^2,$$

dans laquelle on doit prendre successivement les signes supérieurs et les signes inférieurs ensemble.

Or il est remarquable que les 2^{n-1} décompositions qui dérivent de la formule (2) composent *à elles seules* toutes les décompositions de la dernière espèce (E_n), et que les formules (3) n'en fournissent aucune de cette espèce. Pour le démontrer, il suffit de prouver :

1° Qu'elles sont toutes différentes entre elles, donc en nombre effectivement égal à 2^{n-1}, ainsi que le comporte l'espèce (E_n) ;

2° Que, dans chacune d'elles, les deux nombres composants n'ont aucun diviseur commun, ce qui est le caractère propre et distinctif des décompositions de cette espèce.

En premier lieu, si deux de ces décompositions, telles que $(L_1^2 - P_1^2)^2 + \overline{2 L_1 P_1}^2$ et $(L_2^2 - P_2^2)^2 + \overline{2 L_2 P_2}^2$, par exemple, étaient les mêmes, on aurait $L_1^2 - P_1^2 = L_2^2 - P_2^2$, car, $L_1^2 P_1^2$ étant impair, on ne peut supposer qu'on eût $L_1^2 - P_1^2 = 2 L_2 P_2$ et $L_2^2 - P_2^2 = 2 L_1 P_1$. Mais, en considérant celles de N, toutes différentes entre elles, d'où elles dérivent respectivement, on a

$$N = L_1^2 + P_1^2 = L_2^2 + P_2^2,$$

d'où l'on conclurait, en combinant ces deux égalités

par voie d'addition et ensuite de soustraction, $L_1 = L_2$ et $P_1 = P_2$, contrairement à l'hypothèse. Donc les deux décompositions dont il s'agit sont nécessairement différentes, comme celles d'où elles dérivent.

En second lieu, les deux nombres $L_i^2 - P_i^2$ et $2L_iP_i$ sont premiers entre eux; car, si L_i est pair, P_i est impair, ou inversement; donc $L_i^2 - P_i^2$ n'admet pas le facteur 2. En outre, L_i et P_i étant, à cause de la composition du nombre N, premiers entre eux dans la décomposition $N = L_i^2 + P_i^2$, tout diviseur de $L_i\,P_i$ qui diviserait $L_i^2 - P_i^2$ devrait diviser L_i^2 et P_i^2; d'où il s'ensuivrait que L_i et P_i ne seraient pas premiers entre eux, contrairement à ce qui a lieu.

La proposition énoncée se trouve donc établie, et il en résulte que toutes les décompositions provenant de la formule double (3) font partie des $n - 1$ premières espèces, mais jamais de la dernière (E_n).

Observons encore que les décompositions de cette dernière provenance sont en nombre double de celui des combinaisons deux à deux des nombres composants L_i ou P_i, à cause des doubles signes de la formule (3); donc il y en a $2\frac{2^{n-1}(2^{n-1}-1)}{2}$. Or il en existe, comme on l'a vu, 2^{n-1} autres, provenant de la formule (2). Par conséquent, les formules (2) et (3) ensemble en fournissent $2^{n-1} + 2\frac{2^{n-1}(2^{n-1}-1)}{2} = 2^{2(n-1)} = 4^{n-1}$, c'est-à-dire autant qu'il y a d'unités dans le carré de 2^{n-1}, nombre des décompositions de N.

On sait d'ailleurs que le nombre effectif des décompositions de N^2 est $\frac{3^n - 1}{2}$, et, comme on a $\frac{3^n - 1}{2} < 4^{n-1}$, dès que $n > 2$, il s'ensuit nécessairement que quelques-unes des décompositions fournies par les formules (2)

et (3) se répètent; mais cette répétition se présente seulement parmi celles qui dérivent de la formule (3), et jamais parmi celles qui dérivent de la formule (2), puisque celles-ci, toutes différentes entre elles, sont en nombre précisément égal à 2^{n-1}, c'est-à-dire n'excédant pas le nombre de celles qui composent l'espèce (E_n) qu'elles concourent seules à former.

Par exemple, dans le cas où $N = f_1 f_2 f_3$ se compose de trois facteurs simples, les formules

$$N^2 = \overline{L_2 L_3 - P_2 P_3}^2 + \overline{L_2 P_3 + P_2 L_3}^2,$$

$$N^2 = \overline{L_2 L_4 + P_2 P_4}^2 + \overline{L_2 P_4 - P_2 L_4}^2,$$

$$N^2 = \overline{L_3 L_4 + P_3 P_4}^2 + \overline{L_3 P_4 - P_3 L_4}^2,$$

ne font que répéter respectivement celles que fournissent les formules

$$N^2 = \overline{L_1 L_4 - P_1 P_4}^2 + \overline{L_1 P_4 + P_1 L_4}^2,$$

$$N^2 = \overline{L_1 L_3 + P_1 P_3}^2 + \overline{L_1 P_3 - P_1 L_3}^2,$$

$$N^2 = \overline{L_1 L_2 + P_1 P_2}^2 + \overline{L_1 P_2 - P_1 L_2}^2,$$

les quatre valeurs de N en fonction de L_1, P_1; L_2, P_2; L_3, P_3; L_4, P_4 étant d'ailleurs supposées écrites dans l'ordre symétrique qui se présente le plus naturellement.

VIII. Afin de rendre plus clair tout ce qui précède, notamment la règle indiquée (V) pour les permutations de signes, nous allons en faire quelques applications algébriques et numériques, en ayant soin de prendre les deux cas de n pair et de n impair.

Soit d'abord n pair et $N = f_1 f_2 f_3 f_4$.

Les formules (1) développées donnent

$$
\begin{aligned}
x = {} & (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 4 a_1 b_1 . a_2 b_2 (a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 4 a_1 b_1 . a_3 b_3 (a_2^2 - b_2^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 4 a_1 b_1 . a_4 b_4 (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2) \\
& - 4 a_2 b_2 . a_3 b_3 (a_1^2 - b_1^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 4 a_2 b_2 . a_4 b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 - b_3^2) \\
& - 4 a_3 b_3 . a_4 b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2) \\
& + 16 a_1 b_1 . a_2 b_2 . a_3 b_3 . a_4 b_4 .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = {} & 2 a_1 b_1 (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& + 2 a_2 b_2 (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& + 2 a_3 b_3 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& + 2 a_4 b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2) \\
& - 8 a_1 b_1 . a_2 b_2 . a_3 b_3 (a_4^2 - b_4^2) \\
& - 8 a_1 b_1 . a_2 b_2 . a_4 b_4 (a_3^2 - b_3^2) \\
& - 8 a_1 b_1 . a_3 b_3 . a_4 b_4 (a_2^2 - b_2^2) \\
& - 8 a_2 b_2 . a_3 b_3 . a_4 b_4 (a_1^2 - b_1^2) .
\end{aligned}
$$

Si nous désignons par les lettres romaines A, B, C, D, E, F, G, H, dans la valeur de x, et par les mêmes lettres accentuées A′, B′, ..., H′, dans la valeur de y, les huit termes dont ces valeurs se composent respectivement, pris dans l'ordre symétrique où ils y sont écrits, ces indices mnémotechniques nous permettront de présenter sous une forme plus brève et plus claire le tableau ci-après des systèmes de valeurs conjuguées de x et de y, qui sont ici au nombre de $2^{4-1} = 8$, savoir :

	$x =$								$y =$								
	A	B	C	D	E	F	G	H	A′	B′	C′	D′	E′	F′	G′	H′	
1[er] système type . . .	+	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	−	−	−	−	Formules (1).
2[e] »	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	Obtenu par le changement de signe de a_1b_1.
3[e] »	+	+	−	−	+	+	−	−	+	−	+	+	+	+	−	+	Id. de a_2b_2.
4[e] »	+	−	+	[illegible]	+	−	+	−	+	+	−	+	+	−	+	+	Id. de a_3b_3.
5[e] »	+	−	−	+	−	+	+	−	+	+	+	−	−	+	+	+	Id. de a_4b_4.
6[e] »	+	−	+	+	+	+	−	+	−	−	+	+	−	−	+	+	Id. de a_1b_1 et a_2b_2.
7[e] »	+	+	−	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	Id. de a_1b_1 et a_3b_3.
8[e] »	+	+	+	−	−	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	+	Id. de a_1b_1 et a_4b_4.

Conformément à la règle donnée (V) pour le cas de n pair, on n'a eu égard ici qu'aux changements de signes simultanés des produits $a_1 b_1, a_2 b_2$: $a_1 b_1, a_3 b_3$: $a_1 b_1, a_4 b_4$, ceux des trois autres combinaisons $a_2 b_2, a_3 b_3$: $a_2 b_2, a_4 b_4$; $a_3 b_3, a_4 b_4$, ne faisant que répéter les trois premières, comme on peut s'en assurer.

Comme exemple numérique, prenons

$$\begin{aligned} N = 32045 &= 5.13.17.29 \\ &= (2^2+1^2)(3^2+2^2)(4^2+1^2)(5^2+2^2). \end{aligned}$$

On a ici

$$\begin{array}{llll} a_1 = 2, & b_1 = 1, & a_1^2 - b_1^2 = 3, & a_1 b_1 = 2; \\ a_2 = 3, & b_2 = 2, & a_2^2 - b_2^2 = 5, & a_2 b_2 = 6; \\ a_3 = 4, & b_3 = 1, & a_3^2 - b_3^2 = 15, & a_3 b_3 = 4; \\ a_4 = 5, & b_4 = 2, & a_4^2 - b_4^2 = 21, & a_4 b_4 = 10. \end{array}$$

Le premier système du tableau donne, tous calculs faits, les valeurs

$$x = A - B - C - D - E - F - G + H = 31323,$$
$$y = A' + B' + C' + D' - E' - F' - G' - H' = -6764,$$

et

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \overline{31323}^2 + \overline{6764}^2 &= 981130329 \\ + 45751696 = 1026882025 &= \overline{32045}^2. \end{aligned}$$

Si l'on prend les valeurs du huitième système, par exemple, on trouve, tous calculs effectués,

$$x = A + B + C - D - E + F + G + H = 32037,$$
$$y = -A' + B' - C' - D' + E' - F' - G' + H' = -716;$$

d'où

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = \overline{32037}^2 + \overline{716}^2 &= 1026369369 + 512656 \\ &= 1026882025 = \overline{32045}^2. \end{aligned}$$

IX. Actuellement, prenons n impair et N égal à $f_1 f_2 f_3 f_4 f_5$.

Les formules (1) développées donnent

$$
\begin{aligned}
x = {} & (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 4a_1b_1 . a_2b_2 (a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 4a_1b_1 . a_3b_3 (a_2^2 - b_2^2)(a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 4a_1b_1 . a_4b_4 (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 4a_1b_1 . a_5b_5 (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 4a_2b_2 . a_3b_3 (a_1^2 - b_1^2)(a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 4a_2b_2 . a_4b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 4a_2b_2 . a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 4a_3b_3 . a_4b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 4a_3b_3 . a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 4a_4b_4 . a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2) \\
& + 16\, a_1b_1 . a_2b_2 . a_3b_3 . a_4b_4 (a_5^2 - b_5^2) \\
& + 16 . a_1b_1 . a_2b_2 . a_3b_3 . a_5b_5 (a_4^2 - b_4^2) \\
& + 16 . a_1b_1 . a_2b_2 . a_4b_4 . a_5b_5 (a_3^2 - b_3^2) \\
& + 16\, a_1b_1 . a_3b_3 . a_4b_4 . a_5b_5 (a_2^2 - b_2^2) \\
& + 16 . a_2b_2 . a_3b_3 . a_4b_4 . a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y = {} & 2a_1b_1 (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& + 2a_2b_2 (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& + 2a_3b_3 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& + 2a_4b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& + 2a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 8\, a_1b_1 . a_2b_2 . a_3b_3 (a_4^2 - b_4^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 8\, a_1b_1 . a_2b_2 . a_4b_4 (a_3^2 - b_3^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 8\, a_1b_1 . a_2b_2 . a_5b_5 (a_3^2 - b_3^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 8 . a_1b_1 . a_3b_3 . a_4b_4 (a_2^2 - b_2^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 8 . a_1b_1 . a_3b_3 . a_5b_5 (a_2^2 - b_2^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 8 . a_1b_1 . a_4b_4 . a_5b_5 (a_2^2 - b_2^2)(a_3^2 - b_3^2) \\
& - 8 . a_2b_2 . a_3b_3 . a_4b_4 (a_1^2 - b_1^2)(a_5^2 - b_5^2) \\
& - 8 . a_2b_2 . a_3b_3 . a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)(a_4^2 - b_4^2) \\
& - 8 . a_2b_2 . a_4b_4 . a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)(a_3^2 - b_3^2) \\
& - 8\, a_3b_3 . a_4b_4 . a_5b_5 (a_1^2 - b_1^2)(a_2^2 - b_2^2) \\
& + 32\, a_1b_1 . a_2b_2 . a_3b_3 . a_4b_4 . a_5b_5.
\end{aligned}
$$

Si nous représentons, comme ci-dessus (VIII), par les

premières lettres de l'alphabet romain, les seize termes dont se compose la valeur de x, en les prenant successivement dans l'ordre symétrique où ils sont écrits, et si nous faisons de même pour les seize termes de y, avec les mêmes lettres accentuées, nous pourrons écrire le système type des valeurs de x et y ci-dessus, sous la forme

$$x = A - B - C - D - E - F - G - H - I - J - K + L + M + N + O + P.$$

$$y = A' + B' + C' + D' + E' - F' - G' - H' - I' - J' - K' - L' - M' - N' - O' + P'.$$

Effectuant ensuite sur ce système type, qui résulte directement de l'application des formules (1), les permutations de signe indiquées au § V, on forme le tableau suivant, qui comprend les $2^{5-1} = 16$ systèmes de valeurs conjuguées de x et de y, dont se compose le cinquième groupe ou la dernière espèce (E_5) parmi les cinq espèces formant en totalité les

$$\frac{3^5 - 1}{2} = 121$$

systèmes de décomposition dont N^2 est ici susceptible.

$x =$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1er syst.	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	+
2e »	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+
3e »	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	−	−	−	−	[illegible]	−
4e »	+	−	+	[illegible]	−	+	−	−	−	+	−	−	−	+	−	−
5e »	+	−	−	[illegible]	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	−	−
6e »	+	[illegible]	−	−	+	−	−	+	−	+	+	+	−	−	−	−
7e »	+	−	[illegible]	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−
8e »	[illegible]	[illegible]	−	+	+	−	−	−	[illegible]	+	−	−	+	−	+	−
9e »	[illegible]	−	[illegible]	−	[illegible]	−	+	−	+	−	+	+	−	+	+	−
10e »	+	−	−	+	−	−	−	+	[illegible]	+	+	−	+	+	+	−
11e »	−	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	+	+	−	−	+
12e »	+	+	−	+	[illegible]	+	−	+	+	−	+	+	−	+	−	+
13e »	+	+	−	−	+	+	+	−	−	+	+	−	+	+	−	+
14e »	+	−	−	+	−	+	+	−	−	+	+	+	−	−	+	+
15e »	+	−	−	−	−	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	+
16e »	+	−	−	+	+	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+

$y =$

	A′	B′	C′	D′	E′	F′	G′	H′	I′	J′	K′	L′	M′	N′	O′	P′	
1er syst.	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	+	Type initial.
2e »	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	−	−	−	−	Obtenu par le changement de signe du ou des produits a_1b_1.
3e »	+	−	+	+	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	−	−	a_2b_2.
4e »	+	+	[illegible]	+	+	+	−	−	+	+	[illegible]	+	+	−	+	−	a_3b_3.
5e »	+	[illegible]	[illegible]	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	+	−	a_4b_4.
6e »	+	+	+	+	−	−	−	+	−	+	+	−	+	+	+	−	a_5b_5.
7e »	−	−	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−	+	a_1b_1, a_2b_2.
8e »	−	+	−	+	[illegible]	−	+	+	−	−	+	+	+	−	+	+	a_1b_1, a_3b_3.
9e »	−	+	+	[illegible]	+	+	−	+	−	+	−	+	−	+	[illegible]	+	a_1b_1, a_4b_4.
10e »	−	+	+	+	−	+	+	−	+	−	−	−	+	+	+	+	a_1b_1, a_5b_5.
11e »	+	−	−	+	+	−	+	+	+	+	−	−	−	+	+	+	a_2b_2, a_3b_3.
12e »	+	−	+	−	+	+	−	+	+	−	+	−	+	−	+	+	a_2b_2, a_4b_4.
13e »	+	−	+	+	[illegible]	+	+	−	−	+	+	+	−	−	+	+	a_2b_2, a_5b_5.
14e »	+	+	−	−	+	+	+	−	[illegible]	+	+	−	+	+	−	+	a_3b_3, a_4b_4.
15e »	−	+	−	+	−	+	−	+	+	−	+	+	−	+	−	+	a_3b_3, a_5b_5.
16e »	+	+	+	−	−	−	+	+	+	+	−	+	+	−	−	+	a_4b_4, a_5b_5.

Soit, comme exemple numérique,

$$N = 1185665 = 5.13.17.29.37$$
$$= (2^2+1^2)(3^2+2^2)(4^2+1^2)(5^2+2^2)(6^2+1^2),$$

d'où

$$\begin{aligned} a_1^2 - b_1^2 &= 3 \quad \text{et} & a_1 b_1 &= 2,\\ a_2^2 - b_2^2 &= 5 & a_2 b_2 &= 6,\\ a_3^2 - b_3^2 &= 15 & a_3 b_3 &= 4,\\ a_4^2 - b_4^2 &= 21 & a_4 b_4 &= 10,\\ a_5^2 - b_5^2 &= 35 & a_5 b_5 &= 6. \end{aligned}$$

Les valeurs conjuguées données par le onzième système, par exemple, sont

$$x = A + B + C - D - E - F + G + H + I + J - K$$
$$+ L + M - N - O + P = 1112703,$$
$$y = A' - B' - C' + D' + E' - F' + G' + H' + I' + J' - K'$$
$$- L' - M' + N' + O' + P' = 409504.$$

et, par suite,

$$x^2 + y^2 = \overline{1112703}^2 + \overline{409504}^2$$
$$= 1405801492225 = \overline{1185665}^2.$$

X. Si l'on voulait obtenir l'une des décompositions de N^2 qui, dans l'exemple numérique précédent, appartiennent à l'une des autres espèces, à la quatrième par exemple, et qu'on voulût avoir, parmi celles-ci, l'une de celles (au nombre de huit) dans lesquelles x^2 et y^2 ont le facteur commun $\overline{37}^2$, il suffirait d'écrire

$$x^2 = \overline{37}^2 . U^2, \quad y^2 = \overline{37}^2 . V^2,$$

$U^2 + V^2$ représentant l'une des huit décompositions de dernière espèce du nombre $N = 5.13.17.29$ dont nous avons donné le tableau au § VIII.

Il n'est pas nécessaire de s'étendre là-dessus davantage.

XI. Examinons en second lieu le cas où le nombre N est de la forme $f_1^\alpha . f_2^\beta . f_3^\gamma \ldots f_n^\nu$, les facteurs premiers, de la forme $4n+1$, y entrant aux puissances respectives, α, β, γ, ..., ν, et non plus à la première.

Les formules ci-dessus, notamment la formule fondamentale (1), sont encore applicables à ce cas, à la seule condition qu'on écrive $N = f_1 f_1 f_1 \ldots f_2 f_2 f_2 \ldots f_3 f_3 f_3 \ldots$ et qu'on le considère ainsi comme composé de

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

facteurs du premier degré, comme précédemment. Mais alors, comme plusieurs des nombres a_1, a_2, a_3, ... et b_1, b_2, b_3,... sont égaux entre eux, respectivement, cette égalité entraîne des simplifications dans la forme des expressions résultantes, et des réductions dans le nombre des termes dont ces expressions se composent. En outre, il y a des réductions dans le nombre total des décompositions qui composent le groupe (E_n), ainsi que dans tous les autres. On sait, en effet, que dans ce cas le nombre des décompositions de N est donné par la formule

$$I = \frac{1}{2}(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

et celui de N^2 par

$$I' = \frac{1}{2}[(2\alpha+1)(2\beta+1)(2\gamma+1) - 1],$$

au lieu de

$$I = 2^{(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)-1} \quad \text{et} \quad I' = \frac{1}{2}[3^{(\alpha+\beta+\gamma+\ldots)} - 1],$$

qu'on avait dans le cas où les facteurs, en même nombre effectif d'ailleurs, étaient tous différents et du premier degré. Quant à ces réductions qui se produisent alors, elles tiennent à l'une des deux causes suivantes :

Tantôt deux ou plusieurs décompositions, qui sont distinctes dans le cas général, deviennent identiques d'une espèce à l'autre ;

Tantôt elles se réduisent à la décomposition illusoire $N^2 + 0$.

Par exemple, dans le cas particulier où N a la forme $f_1 f_2^2$, c'est-à-dire $f_1 f_2 f_3$, où $f_2 = f_3$, le nombre des décompositions de N^2 s'abaisse de

$$\frac{1}{2}(3^3 - 1) = 13 \text{ à } \frac{1}{2}(3.5 - 1) = 7,$$

savoir deux de première espèce, trois de seconde et deux de troisième, et si $f_1 = f_2 = f_3$, ou $N = f_1^3$, le nombre des solutions n'est plus que de $\frac{1}{2}[(2.3 + 1) - 1] = 3$, dont une de chaque espèce.

Mais il y a à faire sur ces décompositions d'autres remarques plus importantes, dont la démonstration ne présente pas de difficulté.

Bien que le nombre $N = f_1^\alpha f_2^\beta f_3^\gamma \ldots f_n^\nu$, composé de n facteurs (de la forme $4h + 1$) élevés respectivement à des puissances marquées par les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, se décompose de I manières différentes en une somme de deux carrés (I étant égal à

$$\frac{1}{2}(\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)\ldots(\nu + 1),$$

et le $\frac{1}{2}$ qui est en excédant quand le produit est impair comptant pour 1), il n'existe, parmi ces I décompositions, que 2^{n-1} décompositions dans chacune desquelles les deux carrés soient premiers entre eux, et elles existent toujours, de telle sorte que, sous ce rapport, le nombre N se trouve exactement dans le même cas que

si tous les facteurs $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n'y entraient qu'à la première puissance.

Par exemple, le nombre $5^3.13^2.17$, qui comporte douze décompositions, n'en a que quatre, c'est-à-dire le même nombre que $5.13.17$, dans chacune desquelles les deux carrés soient premiers entre eux, et ce sont celles qu'on obtient en regardant comme simples les trois facteurs composés, mais premiers entre eux, 5^3, 13^2 et 17, savoir

$$5^3.13^2.17 = 599^2 + 18^2 = 567^2 + 194^2$$
$$= 537^2 + 266^2 = 409^2 + 438^2,$$

Dans les $I - 2^{n-1}$ autres décompositions de N, les carrés composants ont pour facteur commun l'un des produits qu'on obtient en combinant un à un, deux à deux, trois à trois, etc., et enfin n à n, les facteurs $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, affectés chacun d'un exposant pair, respectivement moindre que celui α, β, ... ou ν dont ils sont affectés dans N.

Dans l'exemple numérique ci-dessus, les huit décompositions qui n'ont pas été écrites sont : 1° les quatre qui ont 5^2 pour facteur commun et dont la partie décomposée correspond au produit des trois facteurs $5.13^2.17$, savoir

$$5^2(54^2 + 107^2), \quad 5^2(98^2 + 69^2),$$
$$5^2(114^2 + 37^2), \quad 5^2(118^2 + 21^2);$$

2° les deux qui proviennent de $13^2(5^3.17)$ et qui sont

$$13^2(42^2 + 19^2), \quad 13^2(46^2 + 3^2);$$

3° enfin les deux qui proviennent de $5^2.13^2(5.17)$, qui ont $5^2.13^2$ en facteur commun et sont

$$5^2.13^2(7^2 + 6^2), \quad 5^2.13^2(9^2 + 2^2).$$

En conséquence, les décompositions de N^2, dont le

nombre total est

$$\Gamma = \frac{1}{2}\left[(2\alpha+1)(2\beta+1)\ldots(2\nu+1)-1\right],$$

ne contiennent, comme faisant partie de la dernière espèce (E_n), que celles qui dérivent des 2^{n-1} décompositions de N où les carrés sont premiers entre eux, par la formule fondamentale $(L_i^2 - P_i^2)^2 + \overline{2L_iP_i}^2$, absolument comme dans le cas (VII) où il n'entrait dans N que n facteurs à la première puissance, et toutes les autres appartiennent aux $n-1$ premières espèces, dans chacune desquelles les deux carrés composants ont un diviseur commun.

En résumé, que N soit composé de n facteurs du premier degré, de la forme $4k+1$, ou de n de ces facteurs élevés chacun à une puissance quelconque, il y a toujours 2^{n-1} décompositions de ce nombre dans chacune desquelles les deux carrés sont premiers entre eux, et pas davantage, et ces 2^{n-1} décompositions donnent naissance, par la formule $(L_i - P_i^2)^2 + \overline{2L_iP_i}^2$, à un pareil nombre de décompositions du carré N^2 de ce nombre, lesquelles jouissent seules de la même propriété parmi toutes les autres décompositions dont N^2 est susceptible et composent exclusivement la dernière espèce (E_n) de ces décompositions ; ce qui est assurément un fait digne de remarque.

XI. Entre autres conséquences de la théorie qui vient d'être exposée, on en déduit une réponse précise à cette question :

Quels sont les nombres entiers dont chacun jouit de la propriété d'être égal à la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs, et d'avoir pour carré la

somme des carrés de deux autres nombres entiers consécutifs.

En d'autres termes, *elle fournit une solution complète du système des équations indéterminées*

$$y = x^2 + (x + 1)^2, \quad y^2 = z^2 + (z + 1)^2,$$

en nombres entiers.

Observons d'abord que y est impair et ne peut avoir pour diviseurs premiers que des facteurs de la forme $4k + 1$. En effet, s'il en avait d'autres de la forme $4k + 3$, il faudrait, comme on sait, pour que la décomposition de y en une somme de deux carrés fût possible d'une manière quelconque, que ces facteurs fussent chacun en nombre pair, c'est-à-dire que leurs produits M^2 fût un carré; on aurait donc, en appelant, comme ci-dessus, N le produit de tous les autres facteurs de forme $4k + 1$,

$$y = M^2 N.$$

On sait d'ailleurs aussi que, ni M, ni M^2 ne sont en aucune façon décomposables en une somme de deux carrés; donc, si $\alpha^2 + \beta^2$ représente l'une quelconque des décompositions de N, la décomposition correspondante de y aurait la forme $y = M^2(\alpha^2 + \beta^2)$, ou $y = M^2\alpha^2 + M^2\beta^2$.

Or le plus petit facteur premier de la forme $4k + 3$ étant 3, il est impossible que la différence entre $M\alpha$ et $M\beta$ ne soit que d'une unité, comme l'exige la première condition de l'énoncé.

Cela posé, si un nombre y satisfait aux équations proposées, son carré ne peut donner lieu à une décomposition telle que $y^2 = z^2 + (z + 1)^2$, que si cette décomposition fait partie de la dernière espèce (E_n) parmi toutes celles que y^2 est susceptible de recevoir; car, pour

toute décomposition $y^2 = u^2 + v^2$ qui ferait partie de l'une quelconque des autres espèces (E_1), (E_2), ..., (E_{n-1}), les deux nombres u, v auraient pour diviseur commun, comme on l'a démontré plus haut, l'un φ des facteurs de y, simples ou multiples, premiers ou composés. Or le plus petit de ces facteurs, de forme $4h + 1$, étant 5, la différence entre u et v, qui est de la forme $\varphi(u' - v')$, est au moins égale à φ, donc *a fortiori* au moins égale à 5, et ne peut, en aucun cas, être égale à l'unité comme l'énoncé de la question l'exige.

C'est donc parmi les décompositions de l'espèce (E_n) seules qu'on peut rencontrer la décomposition

$$y^2 = z^2 + (z + 1)^2.$$

Or, toutes les décompositions de l'espèce (E_n) sont, d'après (VII) et (XI), de la forme $(L_i^2 - P_i^2)^2 + \overline{2L_iP_i}^2$, les nombres entiers L_i, P_i, dont l'un est pair, et l'autre impair, étant tels qu'on ait $y = L_i^2 + P_i^2$. Soit L_i le plus grand de ces deux nombres, et posons, α étant un nombre entier positif, $L_i = P_i + \alpha$; d'où

$$y^2 = (2\alpha P_i + \alpha^2)^2 + (2P_i^2 + 2\alpha P_i)^2.$$

La seconde condition du problème consiste en ce que

$$(4)\quad \begin{cases} (2\alpha P_i + \alpha^2) - (2P_i^2 + 2\alpha P_i) = \pm 1 \\ \text{ou} \\ \alpha^2 - 2P_i^2 = \pm 1. \end{cases}$$

Il en résulte, comme on sait, que les deux nombres entiers α, P_i sont, l'un α le numérateur, l'autre P_i le dénominateur d'une quelconque des réduites de la fraction continue suivant laquelle se développe la racine carrée de 2, savoir d'une réduite de rang impair $\left(\text{la première étant } \frac{1}{0}\right)$ si l'on prend le signe + dans le second membre

de l'équation (4), et d'une réduite de rang pair si l'on prend le signe —.

Ces réduites consécutives sont

$$(5)\qquad \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169},\ \ldots \text{ etc.}$$

Actuellement, la première condition du problème exige que dans la décomposition $L_i^2 + P_i^2$ de y, d'où dérive directement celle $y^2 = (L_i^2 - P_i^2)^2 + \overline{2L_iP_i}^2$ que nous venons de considérer, les nombres composants L_i, P_i ne diffèrent entre eux que d'une unité; en d'autres termes, il faut, non-seulement que α soit le numérateur de l'une des réduites ci-dessus, dont P_i serait le dénominateur, mais encore que ce numérateur soit égal à l'unité.

Or, si l'on exclut dans la suite (5) la première réduite qui donne la solution illusoire $P_i = 0$, on voit que la suivante $\frac{1}{1}$ est la seule qui remplisse les conditions exigées. On a donc

$$P_i \text{ ou } x = 1,\quad \alpha = 1,\quad L_i = 2,$$

d'où

$$y = 1^2 + 2^2 = 5$$

et ensuite

$$y^2 = (L_i^2 - P_i^2)^2 + \overline{2L_iP_i}^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Ainsi le système des valeurs $x = 1$, $z = 3$, $y = 5$ est *le seul* qui résolve la question proposée.

Remarque. — On conclut aussi de là que l'équation indéterminée du quatrième degré

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x = \frac{1}{2}z(z+1)$$

n'est pareillement satisfaite que par les valeurs conjuguées $x = 1$, $z = 3$;

Et encore que, parmi l'infinité des systèmes de deux nombres entiers consécutifs u et $(u+1)$, dont le produit $u(u+1)$ est égal à un nombre triangulaire $\frac{1}{2}z(z+1)$, il n'y en a qu'un seul, savoir 2 et 3, dans lequel le plus petit des deux nombres soit égal au carré d'un nombre entier augmenté de ce nombre lui-même, $2 = 1^2 + 1$, et l'on a $2.3 = \frac{3.4}{2}$.

Nota. — Le lecteur, se référant à la page 242 (*voir* la livraison de juin), ligne 2 en remontant, est prié d'intercaler la parenthèse suivante entre le mot « espèce » et le mot « dans » et avant la virgule :

(c'est l'espèce désignée par E_{n-1}, selon la notation adoptée).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1872;

PAR M. GENTY.

Par un point fixe A *pris sur une surface du second degré donnée, on mène tous les plans qui coupent la surface suivant des courbes dont l'un des sommets est en* A :

1° *Trouver le lieu de celui des axes de la section qui passe au point* A ;

2° *Trouver le lieu du point où le diamètre conjugué du plan sécant, relativement à la surface donnée, rencontre le plan tangent à cette surface au point* A ;

3° *Construire ce dernier lieu dans le cas où le plan tangent en* A *coupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires.*

Soit At une droite située dans le plan tangent à la

surface au point A; un plan quelconque mené par cette droite coupe la surface suivant une conique qui lui est tangente au point A, et, si C′ est le centre de cette conique, C le centre de la surface, la droite CC′ est le diamètre conjugué du plan sécant. La droite AC′ sera une droite du lieu, si elle est perpendiculaire à At.

Or, si le plan sécant tourne autour de At, le diamètre conjugué CC′ décrit un plan (P) qui coupe le plan tangent en A suivant une droite At', et l'on sait que les droites At et At' sont parallèles à deux diamètres conjugués de la conique (C), intersection de la surface par le plan diamétral parallèle au plan tangent au point A.

Donc on aura une droite du lieu en prenant l'intersection du plan (P) avec le plan mené par le point A perpendiculairement à la droite At. Mais ce dernier plan contient la normale à la surface au point A; le plan P contient la droite fixe AC.

Si donc N est le pied de la normale à la surface au point A, sur le plan de la conique C, le lieu du point d'intersection d'un diamètre de cette conique avec la perpendiculaire abaissée du point N sur le diamètre conjugué est la base du cône cherché sur ce plan.

Cette courbe est une hyperbole équilatère (H), qui passe au point N, au point C, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique (C) (*). La tangente au point N est la perpendiculaire abaissée sur le diamètre conjugué de CN; la tangente au point C est le diamètre conjugué de la perpendiculaire à CN.

L'équation de (H) est très-facile à trouver. Soient

$$ax^2 + by^2 = 1$$

(*) Les points d'intersection de cette courbe avec la conique (C) sont les pieds des normales abaissées du point N sur cette courbe.

l'équation de la conique (C) dans son plan, et x_1, y_1 les coordonnées du point N ; l'équation de (H) sera

$$ax(y - y_1) = by(x - x_1).$$

Le cône qui a cette hyperbole pour base a deux de ses arêtes situées dans le plan tangent au point A ; ce sont les droites menées par ce point parallèlement aux axes de la conique (C).

La conique (H) se décompose en un système de deux droites pour $y_1 = 0$; la signification géométrique de cette condition est très-simple. En effet, dans ce cas, la normale à la surface donnée au point A rencontre le plan de la conique (C) en un point N d'un des axes Cx de cette conique ; donc le diamètre $C'y$ est perpendiculaire au plan de ses deux diamètres conjugués AC et Cx; donc ce diamètre est un axe de la surface, et par suite le point A est situé sur une des sections principales de la surface.

Le cône se réduit alors à deux plans, l'un qui est le plan CAN, et l'autre qui est déterminé par le point A, et une parallèle QR à Cy, dont l'équation est

$$ax = b(x - x_1).$$

On obtient un résultat analogue pour $x_1 = 0$.

Si l'on a en même temps $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, le point A est un des sommets de la surface ; le point N se confond avec le point C, centre de la section principale (C). Le cône se compose alors des deux plans principaux qui passent au point A.

Si le point A est un ombilic, la conique C est un cercle, l'hyperbole (H) se compose du diamètre NC et de la ligne située tout entière à l'infini dans le plan du cercle (C) : donc le cône se compose de l'ensemble de deux

plans : le plan ANC, et le plan tangent en A à la surface donnée.

Considérons maintenant la conique Γ, intersection de la surface donnée par le plan CAt' ; soient Ad la droite du lieu située dans ce plan, et C' le milieu de la corde Ad; la droite Cc' coupe At' en un point m' ; il s'agit de trouver le lieu décrit par ce point dans le plan tangent en A, ou, ce qui revient au même, le lieu décrit dans le plan de la conique C par le point m, situé sur le diamètre ee' parallèle à At' et tel que $Cm = Am'$. Soit μ le point d'intersection de ce diamètre avec Ad. On voit très-simplement que le point m est le conjugué harmonique du point μ par rapport aux points e et e'. Or le point μ décrit l'hyperbole (H), et les points e et e' la conique (C) ; donc, si par le centre C de cette dernière conique on mène un rayon vecteur qui la coupe aux points e et e', et qui coupe (H) au point μ, le lieu du point m, conjugué harmonique de μ, par rapport aux points e et e', est la courbe cherchée (Σ).

Cette définition géométrique permet d'obtenir avec la plus grande facilité l'équation et la forme de la courbe. Pour obtenir l'équation, il est commode de recourir aux coordonnées polaires.

Soient R, r et ρ les rayons vecteurs respectifs des courbes C, H et Σ, pour un même angle ω; on aura

$$R^2 = \frac{1}{a\cos^2\omega + b\sin^2\omega}, \quad r = \frac{ay_1\cos\omega - bx_1\sin\omega}{(a-b)\sin\omega\cos\omega}$$

et

$$\rho = \frac{R^2}{r} = \frac{(a-b)\sin\omega\cos\omega}{(a\cos^2\omega + b\sin^2\omega)(ay_1\cos\omega - bx_1\sin\omega)},$$

ou, en revenant aux coordonnées rectilignes,

$$(ax^2 + by^2)(axy_1 - byx_1) = (a-b)xy.$$

Cette équation représente une courbe du troisième ordre qui a un point double à l'origine; les tangentes en ce point sont les axes de la conique (C).

Deux des asymptotes de la courbe (Σ) sont parallèles à celles de la courbe (C); donc elles sont réelles si cette courbe est une hyperbole, et imaginaires si (C) est une ellipse.

La troisième asymptote est parallèle à la tangente de l'hyperbole (H) à l'origine C.

Cherchons les équations des asymptotes elles-mêmes, dans le cas où la conique (C) est une hyperbole.

Pour éviter les radicaux nous remplacerons, dans les équations des courbes, a et b respectivement par $\frac{1}{a^2}$ et $-\frac{1}{b^2}$.

L'équation de (Σ) est alors

$$(b^2x^2 - a^2y^2)(b^2xy_1 + a^2yx_1) - a^2b^2c^2xy = 0,$$

en posant, comme d'habitude,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Les équations des asymptotes seront respectivement de la forme

$$bx - ay + \lambda = 0,$$
$$bx + ay + \mu = 0,$$
$$b^2xy_1 + a^2yx_1 + \nu = 0,$$

et nous obtiendrons les valeurs des indéterminées λ, μ et ν, en identifiant les termes du second ordre du produit

$$(bx - ay + \lambda)(bx + ay + \mu)(b^2xy_1 + a^2yx_1 + \nu)$$

avec les termes du second ordre de l'équation de la courbe; on obtient ainsi très-simplement pour les équa-

tions des asymptotes

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{c^2}{2(ax_1 + by_1)},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{c^2}{2(ax_1 - by_1)},$$

$$\frac{xy_1}{a^2} + \frac{yx_1}{b^2} = -\frac{c^2 x_1 y_1}{a^2 x_1^2 - b^2 y_1^2}.$$

La construction géométrique des asymptotes est extrêmement simple. Soient l et l' les points de rencontre des asymptotes de (C) avec l'hyperbole (H). Menons par le point l une parallèle à Cl', et soit f le point de rencontre de cette droite avec la conique (C). La parallèle à Cl menée par le point f est l'une des asymptotes de la courbe.

Menons de même par le point l' une parallèle à Cl jusqu'à sa rencontre f' avec la courbe (C); la parallèle à Cl' menée par le point f' est une seconde asymptote de la courbe.

Les droites lf et $l'f'$ se coupent en un point G de la courbe H (*).

De même les deux asymptotes de la courbe (Σ) que nous venons de construire se coupent en un même point B de la droite CG; c'est le conjugué harmonique du point G, par rapport aux deux points d'intersection de cette droite avec la conique (C); donc le point B est un point de la courbe (Σ).

Si la conique (C) est une hyperbole équilatère (c'est-à-dire si le plan tangent en A à la surface donnée la coupe suivant deux droites rectangulaires) le point G se confond avec le point N.

(*) Cela résulte de ce que les droites Cl et Cl', faisant le même angle avec chacune des asymptotes de l'hyperbole (H), sont parallèles à deux diamètres conjugués de cette courbe.

Si (C) est une ellipse, les asymptotes Cl et Cl' sont imaginaires, il en est de même des asymptotes de la courbe (Σ) qui leur sont respectivement parallèles ; mais le point G ; et par suite aussi le point B, où ces deux asymptotes coupent la courbe, sont réels.

La troisième asymptote de la courbe (Σ) est toujours réelle ; elle est parallèle à la tangente en C à l'hyperbole (H) ; elle fait donc avec Cx le même angle que CG.

De plus, la distance du point B à cette asymptote est double de la distance du point A à cette même droite, ce qui suffit pour la déterminer.

Si par le point A nous menons une parallèle à ll', le point d'intersection de cette droite avec l'asymptote que nous venons de construire est un point de la courbe.

Il est maintenant facile de trouver les deux formes que présente la courbe, selon que la conique (C) est une ellipse ou une hyperbole.

PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

DONNÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1871 ;

SOLUTION DE M. A. TOURRETTES.

On donne la longueur de la bissectrice de l'angle A *d'un triangle* ABC, *et la somme des deux côtés* AB, AC *qui comprennent cet angle : on demande d'étudier la variation de la surface du triangle, ainsi que les variations de l'angle* A *et des côtés* AB, AC.

Soient x, y, z les côtés du triangle, α la longueur de la bissectrice de l'angle A, D le point de rencontre avec CB, s la somme $y+z$ des deux côtés de l'angle A.

D'après deux théorèmes connus, j'ai

$$yz = \alpha^2 + \mathrm{CD.DB} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{CD}}{y} = \frac{\mathrm{DB}}{z} = \frac{x}{s};$$

d'où

$$\mathrm{CD} = \frac{xy}{s}, \quad \mathrm{DB} = \frac{xz}{s},$$

et par suite

$$yz = \frac{\alpha^2 s^2}{s^2 - x^2};$$

d'ailleurs

$$y + z = s.$$

Les valeurs de y et z sont les racines d'une équation du second degré, qui donne

$$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{s\sqrt{s^2 - x^2} \pm s\sqrt{s^2 - x^2 - 4\alpha^2}}{2\sqrt{s^2 - x^2}}.$$

Pour la réalité des racines, il faut que

$$x^2 \leqq s^2 - 4\alpha^2,$$

et cette condition entraîne $s^2 - x^2 > 0$.

Je cherche maintenant la valeur de $\cos A$. On a immédiatement

$$\cos A = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz},$$

et comme

$$y^2 + z^2 = s^2 - 2yz = \frac{s^2(s^2 - x^2) - 2\alpha^2 s^2}{s^2 - x^2},$$

il vient

$$\cos A = \frac{(s^2 - x^2)^2 - 2\alpha^2 s^2}{2\alpha^2 s^2}.$$

Il faut donc que

$$(s^2 - x^2)^2 - 2\alpha^2 s^2 \leqq 2\alpha^2 s^2 \quad \text{ou} \quad x^2 \geqq s^2 - 2\alpha s.$$

On voit que x doit satisfaire aux deux inégalités

$$s^2 - 4\alpha^2 \geq x^2 \geq s^2 - 2\alpha s.$$

Pour trouver, en fonction de x, l'expression de la surface, je forme sin A

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{s^2 - x^2}{2\alpha^2 s^2}\sqrt{4\alpha^2 s^2 - (s^2 - x^2)^2},$$

et comme

$$s = \frac{1}{2} yz \sin A,$$

il vient

$$s = \frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2 s^2 - (s^2 - x^2)^2}.$$

Ayant trouvé les limites de x^2, il est facile maintenant d'étudier les variations des côtés, de l'angle A et de la surface.

On peut mettre les valeurs de y et z sous la forme

$$\left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{s}{2} \pm \frac{s}{2}\sqrt{1 - \frac{4\alpha^2}{s^2 - x^2}}.$$

Si $x^2 = s^2 - 2\alpha s$, ou sa valeur minima, le radical est maximum, par suite y est maximum, z minimum. On remarque que leur différence est maxima et qu'elle est égale à $\sqrt{s^2 - 2\alpha s}$. Les deux côtés sont l'un sur l'autre.

A mesure que x augmente, y diminue, z croît, et, pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$, les deux côtés deviennent égaux à $\frac{s}{2}$.

Pour l'angle A, on trouve $\cos A = 1$ quand

$$x^2 = s^2 - 2\alpha s;$$

alors $A = 0$, ainsi que je l'ai remarqué ci-dessus. A mesure que x croît, la valeur de cos A diminue et par

suite l'angle augmente. Pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$,

$$\cos A = \frac{8\alpha^2 - s^2}{s^2}.$$

Enfin la surface, nulle pour $x^2 = s^2 - 2\alpha s$, va en augmentant avec x, puisque le carré $(s^2 - x^2)^2$ diminue. Elle est maxima pour $x^2 = s^2 - 4\alpha^2$.

QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

DONNÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1872;

SOLUTION DE M. A. TOURRETTES.

On donne une série de circonférences situées dans un même plan, ayant leurs centres en ligne droite, se touchant extérieurement, de manière que chacune soit tangente à celle qui la précède et à celle qui la suit, et dont les rayons forment une progression géométrique décroissante. On demande le centre de gravité du système prolongé à l'infini.

Soient a le rayon du premier cercle dont le centre est pris pour origine; q la raison de la progression; x la distance du centre de gravité du système à l'origine.

Les rayons seront

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots,\ aq^n;$$

les circonférences

$$2\pi a,\ 2\pi aq,\ 2\pi aq^2,\ \ldots,\ 2\pi aq^n,$$

et les distances de leurs centres à l'origine

$$0,\ a + aq,\ a + 2aq + aq^2,\ \ldots,\ a + 2aq + 2aq^2 + \ldots + aq^n.$$

En appliquant le théorème des moments, on aura une égalité dont le premier membre sera

$$x(2\pi a + 2\pi aq + 2\pi aq^2 + \ldots) \text{ ou } \frac{2\pi ax}{1-q}.$$

Le deuxième membre aura pour expression

$$2\pi a^2[(q + q^2) + (q^2 + 2q^3 + q^4) \\ + (q^3 + 2q^4 + 2q^5 + q^6) + \ldots]$$

ou bien

$$2\pi a^2[q + 2q^2 + 3q^3 + \ldots + nq^n \\ + nq^{n+1} + (n-1)q^{n+2} + \ldots + q^{2n}].$$

Or, la première partie de la parenthèse

$$q + 2q^2 + \ldots + nq^n$$

a pour valeur

$$\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q},$$

et la deuxième est plus petite que

$$n(q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots + q^{2n}),$$

ou bien

$$\frac{nq^{n+1}(1-q^n)}{1-q}.$$

La parenthèse est donc plus petite que la somme suivante :

$$\frac{q}{(1-q)^2} - \frac{q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q} + \frac{nq^{n+1}(1-q^n)}{1-q},$$

qui se réduit à $\frac{q}{(1-q)^2}$ pour $n = \infty$ (*voir* Desboves, *Questions d'Algèbre*, p. 229).

Par conséquent,

$$x = \frac{aq}{1-q}.$$

DÉMONSTRATIONS DIRECTES DE QUELQUES PROPRIÉTÉS CONNUES RELATIVES A LA COURBE ENVELOPPE D'UN SEGMENT DE DROITE DE LONGUEUR CONSTANTE QUI SE MEUT DANS UN ANGLE;

PAR M. A. M.

Soient xoy l'angle donné et ab le segment mobile(*). Ce segment se déplace de façon que a reste sur ox, et b sur oy. Pour un déplacement infiniment petit de ab, on obtient le centre instantané de rotation c en élevant respectivement à ox et oy les perpendiculaires ac, bc.

Les quatre points o, a, c, b sont sur une circonférence dont oc est un diamètre. Comme ce diamètre est égal à $\frac{ab}{\sin xoy}$, sa longueur est constante, quelle que soit la position de ab; par suite, *pendant le déplacement continu de ab, les points tels que c sont une circonférence de centre o.*

La perpendiculaire ce à ab rencontre cette droite au point e, où celle-ci touche son enveloppe. Abaissons aussi la perpendiculaire of sur ab : *les points c et f sont à égales distances du milieu de ab.*

Du centre i de la circonférence $oacb$ menons le diamètre perpendiculaire à ab, et appelons g et h les extrémités de ce diamètre. *Les droites og, oh, perpendiculaires l'une à l'autre, sont les bissectrices des angles formés par ox et oy; elles sont alors fixes pendant le déplacement de ab.*

Appelons p et q les points de rencontre de og et oh

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

avec la normale *ce*. Le segment *pq* est double du diamètre *gh*, il est donc de grandeur constante; par suite, *pendant le déplacement de ab, les normales telles que ce enveloppent une courbe qu'on peut obtenir en déplaçant le segment pq dans l'angle droit goh.*

Menons le diamètre *mn* parallèlement à *ab*, la distance entre ces droites reste la même pendant le déplacement de *ab*. L'enveloppe de *mn* est alors une courbe parallèle à la courbe enveloppe de *ab*. Ces deux enveloppes ont même développée qui est l'enveloppe de *pq*. Le segment *mn* de grandeur constante se déplace dans l'angle droit fixe *mon*. Ainsi *l'enveloppe de mn a pour développée une courbe qui lui est semblable; le rapport de similitude est de* 1 à 2.

Abaissons sur *pq* la perpendiculaire *or* et prenons le point λ symétrique de *r* par rapport au point *c*, milieu de *pq*. Le segment *pq* touche son enveloppe au point λ; ce point est alors le centre de courbure de la courbe enveloppe de *mn*. Appelons *l* le point où *pq* rencontre *mn* et *j* le point où *of* rencontre cette même droite. Il résulte de la construction qui donne λ que *le rayon de courbure* $l\lambda$ *est égal à* 3 *fois oj*. Désignons par *t* le point où la droite $o\lambda$ coupe *mn*. D'après ce que nous venons de dire, le segment *ot* est le quart de $o\lambda$. Le lieu (t) des points, tels que *t*, est alors une courbe semblable à la courbe (λ), lieu des points λ. La tangente à (t) en *t* est alors perpendiculaire à *mn*, c'est-à-dire que (t) rencontre à angle droit les droites, telles que *mn*; donc (t) *est la développante de l'enveloppe de mn.*

Les côtés de l'angle droit *poq* interceptent un segment de grandeur constante sur la parallèle à *pq* menée du point *t*. Ce segment, égal à la moitié de *mn*, en se déplaçant dans l'angle *poq*, a pour enveloppe la développante (t) de la courbe enveloppe de *mn*. *La déve-*

loppante (t) *est alors semblable à la courbe enveloppe de mn.*

Lorsque le segment mn est en $m'n'$ également inclinée sur om et sur on, le point t', tel que t, est le milieu de $m'n'$; il est aussi le point où $m'n'$ touche la courbe enveloppe (mn). Appelons μ et ν les points où cette enveloppe touche om et on. La développante (t) part de t' et coupe $o\mu$ au point μ', tel que $o\mu' = \frac{o\mu}{4}$. Par suite l'arc $\mu t'$ de l'enveloppe (mn) a pour longueur $\frac{3}{4}\, mn$, *et la longueur totale de cette courbe est* $6 . mn$.

BIBLIOGRAPHIE ÉTRANGÈRE.

Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni*, socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Tomo X (1877).

Gennaio. — Intorno alla vita ed ai lavori di *Antonio Maria Lorgna*; Memoria dell' ingre *Ferdinando Jacoli*, professore nella R. Scuola Allievi Macchinisti di Marina in *Venezia*.

Febbraio. — Intorno alla determinazione di *Domenico Maria Novara*, dell' obliquità dell' eclittica. Nota dell' ingre *Ferdinando Jacoli*, professore nella R. Scuola Allievi Macchinisti di Marina in *Venezia*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Marzo. — Recherches sur plusieurs ouvrages de *Léonard de Pise*, et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure;

par M. *Edouard Lucas*, professeur de Mathématiques au lycée *Charlemagne*, à Paris.

Aprile. — Recherches sur plusieurs ouvrages de *Léonard de Pise*, et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure; par M. *Edouard Lucas*, professeur de Mathématiques au lycée *Charlemagne*, à Paris. (*Continuazione.*)

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Maggio. — Recherches sur plusieurs ouvrages de *Léonard de Pise*, et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure; par M. *Edouard Lucas*, professeur de Mathématiques au lycee *Charlemagne*, à Paris. (*Fine.*)

Intorno alla somma delle quarte potenze dei numeri naturali. — B. Boncompagni.

Giugno. — *Niccolò Copernico* e l'Archivio Universitario di *Padova*. Lettera del prof. *Antonio Favaro* a D. B. *Boncompagni*.

Rectification de quelques erreurs relatives au mathématicien arabe *Ibn Al-Banna*.

Extrait d'une lettre adressée à D. B. Boncompagni par M. le Dr *M. Steinschneider*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Luglio. — Le origini ed i gradi di sviluppo del principio delle coordinate: pel prof. Dott. *Sigismondo Günther*. (Traduzione del tedesco con Note del Dott. *Giovanni Garbieri*.)

Agosto. — Intorno ad un opuscolo di *Francesco dal Sole*. Nota del prof. *Pietro Riccardi*.

Documenti inediti relativi a *Francesco dal Sole*.

Intorno alla parola : « *Cumulo* » usata da *Francesco dal Sole* in senso di « *Mille milioni* ». — B. Boncompagni.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Settembre. — Les Mathématiques en Belgique, en 1871, 1873, 1874, 1875; par M. *Paul Mansion*, professeur à l'Université de *Gand*.

Ottobre. — Les Mathématiques en Belgique, en 1871, 1873, 1874, 1875; par M. *Paul Mansion*, professeur à l'Université de *Gand*. (*Fine.*)

Lettera del prof. *Pietro Riccardi* a *D. B. Boncompagni*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Novembre. — Intorno ad alcuni scritti inediti relativi al calcolo dell'abaco. Nota di P. *Treutlein*, professore nel Gin-

nasio di Karlsruhe. (Traduzione dal tedesco del D[r] *Alfonso Sparagna*). Scritti inediti relativi al calcolo dell'abaco.

Dicembre. — Scritti inediti relativi al calcolo dell' abaco. (*Fine*.)

Intorno al Tractatus de abaco di *Gerlando* (*B. Boncompagni*).

Sopra la pubblicazione fatta da *B. Boncompagni* di undici lettere di *Luigi Lagrange* a *Leonardo Eulero*. Osservazioni di *Angelo Genocchi*.

Annunzi di recenti pubblicazioni.

CORRESPONDANCE.

1. Une solution de la question 1252, déjà résolue (p. 231, numéro de mai), nous a été adressée, de Berlin, par M. Kruschwitz.

2. Extrait d'une lettre de M. Catalan :

« La question (1257) est un théorème de *Miquel*, publié d'abord dans le *Géomètre* (1836); puis, dans le *Journal de M. Liouville* (t. III, p. 486; 1838). Je l'ai reproduit dans les diverses éditions des *Théorèmes et Problèmes de Géométrie élémentaire*. »

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1233

(voir 2[e] série, t. XVI, p. 240);

Par M. MORET-BLANC.

Étant donnée une ellipse, soient a et b deux points quelconques réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique: on

prend le point β symétrique du point b par rapport à la polaire de a : démontrer que les points a et β ainsi que les deux foyers de l'ellipse sont situés sur un même cercle que ces points divisent harmoniquement.

(Laguerre.)

Soient

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

l'équation de l'ellipse; x_1, mx_1 les coordonnées du point a; x_2, mx_2 celles du point b, avec la relation

$$(1+m^2)x_1x_2 = a^2 + b^2.$$

L'équation de la polaire du point a est

$$ma^2x_1y + b^2x_1x = a^2b^2,$$

et celle de la perpendiculaire abaissée du point b sur cette droite

$$y - mx_2 = \frac{ma^2}{b^2}(x - x_2),$$

ou

$$ma^2x - b^2y = mc^2x_2.$$

On tire de ces équations les coordonnées du pied de la perpendiculaire

$$x = \frac{a^2(b^4 + m^2c^2x_1x_2)}{(m^2a^4 + b^4)x_1}, \quad y = \frac{mb^2(a^4 - c^2x_1x_2)}{(m^2a^4 + b^4)x_1}.$$

On a ensuite, en appelant x', y' les coordonnées du point β,

$$x' = 2x - x_2 = \frac{2a^2b^4 + (2c^2 - a^2)m^2a^2x_1x_2 - b^4x_1x_2}{(m^2a^4 + b^4)x_1},$$

$$y' = 2y - mx_2 = \frac{[2a^4b^2 + (2c^2 - b^2)b^2x_1x_2 - m^2a^4x_1x_2]m}{(m^2a^4 + b^4)x_1},$$

et, en remplaçant x_1x_2 par sa valeur $\frac{a^2+b^2}{1+m^2}$ et réduisant,

$$x' = \frac{c^2}{(1+m^2)x_1}, \quad y' = -\frac{mc^2}{(1+m^2)x_1}.$$

L'équation générale des cercles passant par les foyers est

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - c^2 = 0;$$

et si le cercle passe par le point a, on a

$$(1 + m^2)x_1^2 - 2m\lambda x_1 - c^2 = 0,$$

d'où

$$2\lambda = \frac{(1 + m^2)x_1^2 - c^2}{m x_1}.$$

L'équation du cercle passant par le foyer et le point a est donc

$$x^2 + y^2 - \frac{(1 + m^2)x_1^2 - c^2}{m x_1} y - c^2 = 0.$$

Elle est vérifiée par les coordonnées x', y' du point β : donc les points a, β et les deux foyers sont sur un même cercle.

La droite $a\beta$ et la tangente en a au cercle ont respectivement pour équations

$$(m x_1 - y')x - (x_1 - x')y = (m x' - y')x_1,$$
$$2x_1 x - 2m x_1 y = (1 + m^2)x_1^2 + c^2;$$

elles coupent l'axe focal en des points e, f dont les abscisses sont

$$x = \frac{m x' - y'}{m x_1 - y_1} = \frac{2c^2 x_1}{(1 + m^2)x_1^2 + c^2},$$

$$x = \frac{(1 + m^2)x_1^2 + c^2}{2x_1}.$$

On a donc

$$Oe.Of = c^2.$$

Ces deux droites et celles qui joignent le point a aux deux foyers, divisant harmoniquement l'axe focal, forment un faisceau harmonique, et il en est de même de celles qui joignent un point quelconque de la circonférence aux points a, β et aux deux foyers, ce qui démontre la seconde partie du théorème.

Le théorème subsisterait évidemment si la conique était une hyperbole.

Note. — La même question a été résolue par M. H. Lez et par M. F. Pisani, qui démontre en outre une série de théorèmes concernant des groupes de quatre points analogues aux précédents et situés respectivement sur des cercles.

Question 1235

(voir 2e série, t. XVI, p. 286);

PAR M. MORET-BLANC.

On donne une ellipse de centre O. Prenons un point m sur cette courbe, et appelons μ le centre de courbure de l'ellipse correspondant à m. Menons la droite μO et désignons par t le point où elle rencontre la tangente en m à l'ellipse. On demande :

1° *Quel est le lieu décrit par t lorsque m parcourt l'ellipse ;*

2° *De démontrer que la tangente en t à ce lieu rencontre $m\mu$ en un point r tel que* $mr = \frac{m\mu}{4}$.

(MANNHEIM.)

1° Soit

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

l'équation de l'ellipse. Les coordonnées ξ, η du centre de courbure correspondant au point $m(x, y)$ sont déterminées par les équations

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \quad 1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

On en tire

$$\eta = -\frac{c^2y^3}{b^4}, \quad \xi = \frac{c^2x^3}{a^4}.$$

La ligne μO a pour équation

(2) $$\frac{Y}{X} = \frac{\eta}{\xi} = -\frac{a^4 y^3}{b^4 x^3},$$

et la tangente en m à l'ellipse,

(3) $$a^2 y Y + b^2 x X = a^2 b^2.$$

On tire de ces deux équations les coordonnées du point t,

$$X = -\frac{a^2 b^6 x^3}{a^6 y^4 - b^6 x^4}, \quad Y = \frac{a^6 b^2 y^3}{a^6 y^4 - b^6 x^4}.$$

En différentiant par rapport à la variable indépendante x, dont y est fonction en vertu de l'équation de l'ellipse, on trouve

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{a^2 y(a^6 y^4 + 3 b^6 x^4 + 4 a^2 b^4 x^2 y^2)}{b^2 x(b^6 x^4 + 3 a^6 y^4 + 4 a^4 b^2 x^2 y^2)},$$

ou, en éliminant y dans les parenthèses au moyen de l'équation de l'ellipse,

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{a^2 y[a^6 + 2a^2(b^2 - c^2)x^2 + c^2 x^4]}{b^2 x(3a^6 - 2a^4 c^2 x^2 - c^2 x^4)},$$

coefficient angulaire de la tangente en t à la courbe lieu du point t.

On obtiendra l'équation de cette courbe en éliminant x et y entre les équations (1), (2) et (3). L'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{a^4 y^3}{Y} = -\frac{b^4 x^3}{X} = \lambda^3,$$

d'où

$$y = \lambda \frac{Y^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}}, \quad x = -\lambda \frac{X^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}}.$$

En reportant ces valeurs dans les équations (1) et (3), et

éliminant λ, on obtient l'équation du lieu du point t :

$$(4)\qquad \left[\left(\frac{Y^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{X^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2 = (aX)^{\frac{2}{3}} + (bY)^{\frac{2}{3}}.$$

2° Si l'on prend le point r au quart de $m\mu$, ses coordonnées sont

$$x_1 = \frac{3x + \xi}{4} = \frac{3a^4x + c^2x^3}{4a^4},\quad y_1 = \frac{3y + \eta}{4} = \frac{3b^4y - c^2y^3}{4b^4}.$$

Le coefficient angulaire de la droite tr est

$$\frac{Y - y_1}{X - x_1} = -\frac{a^2y[4a^8b^6y^2 - (a^6y^4 - b^6x^4)(3a^2b^4 - a^2c^2y^2)]}{b^2x[4a^6b^8x^2 + (a^6y^4 - b^6x^4)(3a^4b^2 + b^2c^2x^2)]}$$

$$= -\frac{a^2y[a^{10} + a^6(2b^2 - 3c^2)x^2 - a^2c^2(3c^2 - b^2)x^4 - c^4x^6]}{b^2x[3a^{10} - a^6(3c^2 + 2a^2)x^2 + a^4c^2x^4 + c^4x^6]},$$

et, en divisant haut et bas par $a^4 - c^2x^2$,

$$\frac{Y - y_1}{X - x_1} = -\frac{a^2y[a^6 + 2a^2(b^2 - c^2)x^2 + c^2x^4]}{b^2x(3a^6 - 2a^4c^2x^2 - c^2x^4)} = \frac{dY}{dX};$$

donc la tangente en t à la courbe (4) passe par le point r situé sur $m\mu$, de telle sorte que $mr = \frac{m\mu}{4}$.

On obtient encore ce point en cherchant l'intersection de la tangente en t à la courbe (4) et de la normale en m à l'ellipse.

La courbe, lieu du point t, a quatre points de rebroussement aux quatre sommets de l'ellipse, et quatre asymptotes parallèles aux droites $Y = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}X$, c'est-à-dire parallèles aux normales menées du centre à la développée de l'ellipse. Les points m correspondant aux points t à l'infini sont donnés par la relation

$$a^6y^4 = b^6x^4 \quad \text{ou} \quad a^3y^2 = b^3x^2,$$

d'où

$$x = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}, \quad y = \frac{b^{\frac{3}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente en ce point est bien $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$, et l'ordonnée à l'origine $\pm\sqrt{b(a+b)}$.

Les asymptotes ont donc pour équations

$$Y = \pm X\sqrt{\frac{b}{a}} \pm \frac{3}{4}\sqrt{b(a+b)}.$$

On a ainsi une idée assez nette de la forme de la courbe.

La distance du centre aux asymptotes est $\sqrt{ab}$.

Note. — La même question a été résolue par M. Sondat.

Question 1238

(voir 2e série, t. XVI, p. 287);

Par M. S. REALIS.

A chaque racine réelle, k, de l'équation à coefficients réels

$$y^3 + (4p+1)y + 8q = 0$$

correspond une racine appartenant à l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

et comprise entre $\frac{k-1}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$.

Soit k une racine réelle de l'équation

$$y^3 + (4p+1)y + 8q = 0;$$

posons

$$F(x) = x^4 + 2px^2 + 4qx + \frac{(k-1)(k+1)(3k^2+8p+1)}{16};$$

d'où

$$F'(x) = 4(x^2 + px + q).$$

On trouve, en substituant successivement $\frac{k-1}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$ à x dans $F(x)$,

$$F\left(\frac{k-1}{2}\right) = \frac{k-1}{4}[k^3 + (4p+1)k + 8q],$$

$$F\left(\frac{k+1}{2}\right) = \frac{k+1}{4}[k^3 + (4p+1)k + 8q],$$

c'est-à-dire, puisque k est racine de l'équation en y,

$$F\left(\frac{k-1}{2}\right) = 0, \quad \text{et} \quad F\left(\frac{k+1}{2}\right) = 0.$$

Ainsi $\frac{k-1}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$ sont racines de l'équation $F(x) = 0$, et par conséquent, il y a entre elles, au moins, une racine de l'équation dérivée $F'(x) = 0$.

Note. — Autres solutions de MM. Moret-Blanc; Dunoyer, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Marseille; Eugène Delmas, élève du lycée de Lyon; Beaugey, du lycée de Grenoble; Barthe, du lycée de Bordeaux.

Question 1258

(voir 2e série, t. XVII, p. 278);

PAR M. A. MOREL.

Soient ABC *un triangle;*

D, E, F *les pieds des hauteurs menées des sommets* A, B, C;

O *le point d'intersection de la ligne* EF *avec une parallèle au côté* BC, *menée par le sommet* A;

a le milieu de BC;

G *et* H *les points d'intersection de* AO *et d'un cercle décrit du point* O *comme centre avec* O*a pour rayon.*

On demande de démontrer :

1° *Que les droites* aG *et* aH *sont, respectivement, les bissectrices des angles* OaB *et* OaC;

2° *Que, si la hauteur* AD *coupe le cercle au point* K, *on a* $AK = Ba$ (*). (Genty.)

1° Le triangle isoscèle OHa nous donne $OaH = OHa$; mais, d'après la construction, $OHa = HaC$, comme angles alternes-internes. Donc aH est bissectrice de l'angle OaC. La droite aG étant perpendiculaire sur aH, cette droite aG est bissectrice de l'angle OaB.

2° Les angles OAF, OEA sont tous deux égaux à l'angle B du triangle; donc $\overline{OA}^2 = OE \times OF$. Mais, le quadrilatère BFEC étant inscriptible,

$$OE \times OF = \overline{Oa}^2 - \overline{Ba}^2,$$

puisque le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère est Ba. On a donc

$$\overline{OA}^2 = \overline{Oa}^2 - \overline{Ba}^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{Ba}^2 = \overline{Oa}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{AK}^2,$$

puisque AK est perpendiculaire sur le diamètre GH; donc $Ba = AK$.

Note. — Autres solutions de MM. J. Chambon; Moret-Blanc; Michel; Pisani.

Question 1260

(voir 2e série, t. XVII, p. [illegible]);

Par M. A. MOREL.

D'un point O *pris sur une circonférence, dont un diamètre est* OE, *on décrit une circonférence qui rencontre la première en des points* A, B; *puis, on joint*

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

un point quelconque C *de la deuxième circonférence aux points* A, B, E *par des droites qui coupent la première en des points* F, D, G.

1° *Les droites* EF, ED *sont respectivement parallèles à* CB, CA ;

2° *La droite* CE *fait, avec les côtés du triangle* CAB, *les mêmes angles que la médiane partant du sommet* C ;

3° *La droite* CG *est moyenne géométrique entre* GA *et* GB (*). (A. Cambier.)

1° Je joins le point B au point E ; la droite BE est tangente à la circonférence O. Il en résulte que les angles ABE, ACD sont égaux. Mais les angles ABE, AFE, inscrits dans un même segment de cercle, sont aussi égaux entre eux ; il y a donc égalité entre les angles ACD, AFE ; et, parce que ces derniers angles ont la position d'angles correspondants, les droites FE, CB sont parallèles.

Les arcs BE, AE étant égaux, on a

$$\mathrm{BDE} = \mathrm{AFE} = \mathrm{ACD};$$

il s'ensuit, en ayant égard au parallélisme des droites FE, CB, que les droites ED, CA sont aussi parallèles.

2° La droite AB, perpendiculaire à OE, en un point P, est la polaire du point E, par rapport à la circonférence O ; et, par conséquent, les droites menées de P aux points C, M, où la droite EC rencontre la circonférence O, sont également inclinées sur OE, et, par suite, sur AB. On en conclut facilement que BM = AK, le point K étant à la rencontre de la circonférence O

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

et de la droite CP. Donc l'angle ACP = MCB et ACM = KCB (*).

3° Dans le triangle GAC, l'angle AGC est égal à l'angle BGC du triangle GBC ; l'angle GAC est égal à l'angle GCB. Les triangles GAC, GBC sont donc semblables, et leurs côtés homologues donnent $\frac{CG}{BG} = \frac{GA}{CG}$; la troisième partie de la proposition est ainsi démontrée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Kruschwitz ; Ch. Richard ; Moret-Blanc ; Pisani ; Robaglia ; Fauquembergue ; Armand Bertrand.

QUESTIONS.

1275. On donne quatre points a, b, c, d dans un plan, et deux points p, p', non situés dans ce plan.

Les droites d'intersection de deux couples de plans (pab), $(p'cd)$ et (pcd), $(p'ab)$ sont dans un même plan (P) ; on peut obtenir *six* plans analogues en combinant de toutes les manières possibles les points a, b, c, d ; ces six plans se coupent suivant une même droite (D) qui rencontre pp'. (Genty.)

(*) Cette seconde partie de la proposition énoncée résulte simplement de ce que : *dans des triangles semblables, les médianes menées des sommets homologues forment les mêmes angles avec les côtés homologues des triangles.* En menant la diagonale DF du parallélogramme CDEF, on détermine un triangle CDF semblable à CAB ; la médiane menée du sommet C du triangle CDF coïncide avec la diagonale CE du parallélogramme CDEF ; elle forme, avec les côtés CD, CF, FD du triangle CDF, les mêmes angles que la médiane CP avec les côtés CA, CB, AB du triangle ACB. (G.)

1276. Soient ABC un triangle, et O un point quelconque du plan ; démontrer que la puissance de O, par rapport au cercle circonscrit au triangle, a pour expression

$$\frac{a^2.\,\text{OCB} + b^2.\,\text{OAC} + c^2.\,\text{OBA}}{\text{ABC}},$$

a, b, c étant les longueurs des trois droites OA, OB, OC, et les aires OCB... recevant des signes convenables, suivant le sens dans lequel elles sont parcourues.

(LAISANT.)

1277. Soient (C) et (C_1) deux courbes planes qu'une droite mobile rencontre sous des angles constants μ et μ_1.

Pour que ces deux courbes soient semblables, il faut qu'elles soient deux *spirales logarithmiques* semblables par rapport au point asymptotique, et tournées autour de ce point, l'une relativement à l'autre, d'un angle égal à la différence des angles de rencontre μ et μ_1.

Remarquer le cas de deux courbes semblables, mais quelconques, tournées l'une relativement à l'autre d'un certain angle, autour du pôle de similitude.

Point de contact de la droite mobile avec son enveloppe, dans les deux cas.

(EDOUARD HABICH.)

1278. Trouver la somme des puissances semblables des racines de l'équation trinôme

$$x^{2n} + px^n + q = 0,$$

lorsque l'exposant t est un multiple de n.

(PELLET.)

SUR LES COURBES DU QUATRIÈME DEGRÉ QUI ONT TROIS POINTS DOUBLES D'INFLEXION, ET EN PARTICULIER SUR LA LEMNISCATE;

Par M. LAGUERRE.

1. Je dis qu'une courbe a un point double d'inflexion, lorsque chacune des deux branches de la courbe, qui se croisent en ce point, y présente une inflexion.

L'objet de cette Note est l'étude des courbes du quatrième degré possédant trois points doubles d'inflexion. Comme ces courbes appartiennent à la famille des courbes du quatrième degré, qui ont deux points doubles, on connaît par cela même un grand nombre de leurs propriétés; elles jouissent, en outre, de propriétés spéciales qui méritent d'être signalées.

En particulier, je distinguerai celle de ces courbes pour laquelle deux des points doubles d'inflexion sont les *ombilics* (*) du plan; la forme simple que prennent dans ce cas un grand nombre de théorèmes permet d'en poursuivre plus facilement les conséquences. Cette courbe n'est autre, d'ailleurs, que le lieu des projections du centre d'une hyperbole équilatère sur ses tangentes. C'est donc la lemniscate de Bernoulli.

2. En désignant par P, Q et R les trois points doubles d'inflexion de la courbe du quatrième degré K, je prendrai pour triangle de référence le triangle PQR; en

(*) Je désigne ainsi les deux points imaginaires, situés sur la droite de l'infini, qui sont communs à tous les cercles du plan.

sorte que les équations des côtés QR, RP, PQ seront respectivement

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = 0.$$

Cela posé, l'équation générale de la courbe K est, comme il est facile de le vérifier :

$$(1) \qquad a y^2 z^2 + b z^2 x^2 + c x^2 y^2 = 0,$$

a, b et c désignant des coefficients constants.

Si l'on pose, pour abréger,

$$U = x\xi(bz^2 + cy^2) + y\eta(cx^2 + dz^2) + z\zeta(ay^2 + bx^2$$

$$V = a\eta\zeta yz + b\zeta\xi zx + c\xi\eta xy$$

et

$$W = \frac{a\eta\zeta}{\xi} + \frac{b\zeta\xi}{\eta} + \frac{c\xi\eta}{\zeta},$$

on a, comme on le voit aisément, l'identité suivante :

$$(2) \qquad U = V\left(\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta}\right) - xyzW.$$

C'est sur cette identité que je m'appuierai principalement dans tout ce qui suit.

3. Je remarque d'abord que $U = 0$ est l'équation de la *cubique polaire* du point (ξ, η, ζ) par rapport à la courbe K. Soit M ce point, et supposons qu'il soit situé sur K, on a alors $W = 0$, et l'identité (2) montre que la cubique polaire de M se décompose en une droite et une conique ; je dirai que cette droite et cette conique sont respectivement la *droite harmonique* et la *conique harmonique* du point M.

La cubique polaire de M passe, comme on le sait, par le point M, où elle touche K, par les points de contact des

quatre tangentes que de M on peut mener à la courbe, et par les trois points doubles P, Q et R.

La droite harmonique de M, ne passant ni par M, ni par les points doubles, la conique harmonique de M ne rencontrant d'ailleurs K qu'en ces points, on en conclut les propositions suivantes :

La conique harmonique du point M *passe par les trois points doubles de la courbe, et touche cette courbe au point* M.

Si, d'un point quelconque M *de la courbe, on mène à cette courbe les quatre tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les quatre points de contact sont situés sur une même droite, qui est la droite harmonique de* M.

4. L'équation de la droite harmonique du point M est

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 0.$$

C'est donc la droite polaire du point M relativement au triangle PQR.

En particulier, si les points Q et R sont les ombilics du plan et, par suite, si K est une *lemniscate*, la droite harmonique du point M s'obtient en prolongeant le segment MP d'une longueur égale à la moitié de ce segment, et en menant par l'extrémité de ce prolongement une perpendiculaire à MP.

Les droites harmoniques des différents points de la courbe K *enveloppent une conique* H *ayant pour équation*

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0.$$

En effet, soient (ξ, η, ζ) les coordonnées d'un point M de K, on a entre ces coordonnées la relation

$$\frac{a}{\xi^2} + \frac{b}{\eta^2} + \frac{c}{\zeta^2} = 0,$$

et, par suite, si l'on pose $\frac{\xi\xi'}{a} = \frac{\eta\eta'}{b} = \frac{\zeta\zeta'}{c}$,

$$\frac{\xi'^2}{a} + \frac{\eta'^2}{b} + \frac{\zeta'^2}{c} = 0.$$

Le point (ξ', η', ζ') est donc sur la conique H, et la tangente menée en ce point à cette conique a pour équation

$$\frac{x\xi'}{a} + \frac{y\eta'}{b} + \frac{z\zeta}{c} = 0;$$

ou bien encore

$$\frac{x}{\xi} + \frac{y}{\eta} + \frac{z}{\zeta} = 0.$$

C'est précisément l'équation de la droite harmonique du point M; la proposition énoncée est donc démontrée.

5. *Le lieu des pôles de chacun des côtés du triangle fondamental* PQR, *relativement aux coniques harmoniques des divers points de la courbe* K, *est la conique* H.

Considérons, par exemple, le côté QR, dont l'équation est $z = 0$; en désignant par (ξ, η, ζ) un point quelconque de K, l'équation de la conique harmonique est

$$\frac{ayz}{\xi} + \frac{bzx}{\eta} + \frac{cxy}{\zeta} = 0,$$

et les coordonnées du pôle de QR, relativement à cette courbe, sont données par les relations

$$\frac{az}{\xi} + \frac{cx}{\zeta} = 0, \quad \frac{bz}{\eta} + \frac{cy}{\zeta} = 0;$$

d'où

$$\frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{x}{a}} = \frac{\frac{1}{\eta}}{\frac{y}{b}} = \frac{\frac{1}{\zeta}}{-\frac{z}{c}}.$$

On a d'ailleurs, puisque le point (ξ, η, ζ) est sur la courbe K, la relation

$$\frac{a}{\xi^2} + \frac{b}{\eta^2} + \frac{c}{\zeta^2} = 0;$$

d'où il vient, en remplaçant $\frac{1}{\xi}$, $\frac{1}{\eta}$ et $\frac{1}{\zeta}$ par leurs valeurs, l'équation suivante du lieu cherché :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Dans le cas de la lemniscate, c'est-à-dire si les points Q et R sont les ombilics du plan, il est facile de voir que la conique H est une hyperbole équilatère.

Les coniques harmoniques des divers points de la podaire sont alors des cercles passant par le point fixe P, et tangentes à la courbe. En vertu du théorème précédent, les centres de ces cercles décrivent l'hyperbole équilatère H; on peut donc énoncer les propositions suivantes :

Étant donnée une hyperbole équilatère H, *le lieu des points symétriques du centre* P *de cette conique, relativement à ses tangentes, est une lemniscate.*

Si, d'un point quelconque M *d'une lemniscate, on mène les quatre tangentes dont le point de contact est distinct de* M, *les quatre points de contact sont situés sur une même droite tangente à l'hyperbole* H *et per-*

pendiculaire au rayon PM; *cette droite et le point* M *étant d'ailleurs situés de côtés différents relativement au centre* P.

La cubique polaire du point M, *relativement à la lemniscate, se compose de la droite dont je viens de parler et du cercle passant par le point* P *qui touche la lemniscate au point* M; *le centre de ce cercle est sur l'hyperbole équilatère.*

7. Considérons une droite quelconque rencontrant la courbe K en quatre points, a, b, c et d. D'après une proposition connue, les cubiques polaires de ces points passent toutes par neuf mêmes points. Les cubiques polaires des deux points a et b se composent respectivement de deux coniques passant par les points P, Q, R et de deux droites; soit (a, b) le point d'intersection de ces deux droites.

La cubique polaire de c se compose également de la conique harmonique de ce point et d'une droite. La droite ne peut passer par le point (a, b); on pourrait en effet, dans ce cas, mener de ce point trois tangentes à la conique H, ce qui est évidemment impossible; il en résulte que la conique harmonique de c passe par le point (a, b).

D'où la proposition suivante :

Étant donnés, sur la courbe K, *quatre points en ligne droite, les droites harmoniques de ces quatre points forment un quadrilatère complet. Si l'on considère le triangle formé par trois quelconques de ces droites correspondant à trois des points mentionnés de la courbe, la conique harmonique du quatrième point est la conique circonscrite au triangle et passant par les trois points* P, Q, R.

Ainsi les neuf points fixes par lesquels passent les cubiques polaires des points de la droite *abcd* sont les points P, Q, R et les sommets du quadrilatère complet formé par les droites harmoniques des points *a*, *b*, *c* et *d*.

Dans le cas de la lemniscate, la proposition précédente peut s'énoncer ainsi :

Étant donnés trois points d'une lemniscate situés sur une même ligne droite D, *le cercle circonscrit au triangle formé par les droites harmoniques de ces trois points passe par le centre de la lemniscate et touche cette courbe en son quatrième point de rencontre avec* D.

8. Des considérations précédentes résulte encore immédiatement que *si, par un point quelconque* M *de la courbe* K, *on mène une sécante rencontrant la courbe en trois autres points, les droites harmoniques de ces points forment un triangle circonscrit à la conique* H *et inscrit dans la conique harmonique du point* M.

En appelant (M) cette conique harmonique, on voit que, quand la sécante tourne autour du point M, les côtés du triangle mobile enveloppent H, tandis que ses sommets décrivent (M).

D'où la proposition suivante :

Du point M *on peut mener à la courbe* K *quatre tangentes touchant la courbe en quatre points* a, b, c, d, *situés en ligne droite; ces quatre tangentes rencontrent de nouveau la courbe en quatre autres points* α, β, γ *et* δ.

Les tangentes communes à H *et à* (M) *sont les droites harmoniques des points* α, β, γ *et* δ; *les tangentes, menées à* H *aux points où cette courbe rencontre* (M), *sont les droites harmoniques des points* a, b, c *et* d.

9. Généralement (*), si, des seize points d'intersection de deux courbes du quatrième degré, huit sont situés sur une courbe du deuxième degré, les huit autres sont également situés sur une courbe du deuxième degré.

Soit M un point quelconque de la courbe K, les quatre tangentes issues de ce point peuvent être considérées comme une courbe du quatrième ordre rencontrant K en seize points, dont huit (à savoir les points de contact des tangentes) peuvent être considérés comme étant situés sur une droite double. Les huit autres points de rencontre sont les quatre points α, β, γ et δ et le point M, que l'on doit considérer comme quadruple.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les quatre tangentes menées à K *par un point* M *de cette courbe la rencontrent en quatre points distincts de* M *et des points de contact; la conique, déterminée par* M *et ces quatre points, a avec la courbe* K, *au point* M, *un contact du troisième ordre.*

10. Je reviens maintenant à l'identité (2).

En considérant ξ, η, ζ comme des coordonnées courantes et x, y, z comme les coordonnées d'un point donné A, on voit que $U = 0$ est l'équation de la *droite polaire* du point A relativement à la courbe K, et $W = 0$ l'équation de cette courbe elle-même.

Cela posé, on peut énoncer le théorème suivant :

Étant donné un point quelconque A *du plan, la conique polaire du point* A, *relativement au triangle* PQR, *rencontre la courbe* K, *indépendamment des points* P, Q *et* R, *en deux autres points. La droite qui*

(*) SALMON, *Higher plane curves*, seconde édition, p. 16.

joint ces deux points est la droite polaire du point A, *relativement à la courbe* K.

En effet, la conique polaire du point A, relativement au triangle PQR, a pour équation

$$\frac{x}{\xi}+\frac{y}{\eta}+\frac{z}{\zeta}=0,$$

et, en vertu de l'identité (2), les points où elle rencontre (indépendamment des points P, Q et R) la courbe K, dont l'équation est $W=0$, sont bien situés sur la droite $U=0$.

11. Soit une droite quelconque D rencontrant K aux points a, b, c et d; on sait que cette droite a (relativement à K) six pôles qui sont les points communs aux cubiques polaires de a, b, c et d.

Du théorème précédent, il résulte que :

Les six pôles de la droite D, *relativement à* K, *sont les pôles, relativement au triangle* PQR, *des six coniques que l'on peut mener par les points* P, Q, R *et les six couples de points* a, b; a, c; a, d; b, c; b, d; c, d.

D'où encore cette conclusion :

Si une droite, passant par deux points α *et* β *de la courbe* K, *touche cette courbe en un troisième point* γ, *le pôle de la conique* PQR$\alpha\beta$, *relativement au triangle* PQR, *est le point de contact* γ.

12. Dans le cas de la lemniscate, c'est-à-dire quand les points Q et R sont les ombilics du plan, la conique polaire du point A, relativement au triangle PQR, est le cercle passant par le point P et ayant pour centre le point A′ symétrique de A par rapport au point P.

Les propositions précédentes peuvent alors s'énoncer ainsi qu'il suit :

Une droite D *rencontrant en quatre points une lemniscate, les six pôles de* D, *relativement à la lemniscate, sont les symétriques, par rapport au centre* P *de la courbe, des centres des six cercles que l'on peut faire passer par le point* P *et deux quelconques des points d'intersection de* D *et de la lemniscate.*

Si une droite, passant par deux points α *et* β *d'une lemniscate, touche cette courbe au point* γ, *le point symétrique du point* γ, *relativement au centre de la lemniscate, est le centre du cercle qui passe par ce centre et les deux points* α *et* β.

13. Pour abréger les considérations qui suivent, je considérerai particulièrement une lemniscate; les propositions que j'obtiendrai ainsi subsisteront d'ailleurs évidemment pour une courbe quelconque à trois points doubles d'inflexion.

Soient a et b deux des points où une droite D rencontre une lemniscate, le point symétrique, par rapport au centre P de cette courbe, du centre du cercle circonscrit au triangle Pab est, d'après ce que j'ai dit plus haut, un des pôles de la droite D par rapport à la lemniscate.

Des propositions énoncées précédemment (n° 6), il résulte d'ailleurs que ce pôle est le point de rencontre des *droites harmoniques* des points a et b.

D'où cette proposition :

Les six pôles d'une droite relativement à une courbe K *sont les six sommets du quadrilatère complet formé par les droites harmoniques des quatre points où la droite rencontre la courbe* K (*).

(*) *Voir* n° 7.

14. Si une droite tourne autour d'un point A, on sait que la cubique polaire de ce point est le lieu des pôles de la droite mobile.

D'où la conclusion suivante :

Si, par un point A, *on mène une sécante mobile, et si l'on désigne par a et b deux des points où elle rencontre la courbe* K, *le lieu des intersections des droites harmoniques des points a et b est la cubique polaire de* A *relativement à la courbe* K.

Si l'on considère en particulier une des sécantes qui passent par le point A, les six pôles de cette sécante sont les sommets du quadrilatère complet déterminé par les droites harmoniques des points d'intersection de la sécante avec K ; on voit que, quand la sécante tourne autour du point A, les côtés de ce quadrilatère roulent sur la conique H pendant que ses six sommets décrivent la cubique polaire du point A.

15. Considérons une droite D rencontrant la courbe K aux points α, β, et touchant cette courbe au point γ; il est clair que les droites harmoniques des points α et β se croisent au point γ. La conique harmonique du point γ passant par ce dernier point, les droites dont je viens de parler la rencontrent de nouveau en deux points, que je désignerai respectivement par a et b. Cela posé, il résulte de ce qui est établi plus haut que la droite ab est la droite harmonique du point γ.

D'où la proposition qui suit :

Si d'un point γ situé sur la courbe K *on mène deux tangentes à la conique* H, *ces deux tangentes sont les droites harmoniques des points où la tangente, menée en γ à la courbe* K, *rencontre cette courbe ; ces tan-*

gentes rencontrent de nouveau H *en deux points, et la droite qui joint ces deux points est la droite harmonique du point* γ.

16. Étant donnés, sur une droite, deux groupes de trois points, α, β, γ et α', β', γ', je dirai que ces deux groupes forment un *système harmonique* (*) si, ces deux groupes étant respectivement déterminés par les racines des deux équations

$$\Omega = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

et

$$\Omega' = a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3,$$

l'invariant quadratique des deux formes Ω et Ω', à savoir :

$$I = ad' - 3bc' + 3cb' - da',$$

est identiquement nul.

Cela posé, on peut énoncer ce théorème remarquable :

Si l'on considère les cubiques polaires de deux points quelconques du plan, relativement à la courbe K, *toute droite tangente à la conique* H *rencontre les deux polaires en deux groupes de trois points qui forment un système harmonique.*

Pour démontrer ce théorème, je remarque que l'équation d'une tangente quelconque à la conique H est

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0,$$

(*) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les singularités des courbes de quatrième classe* (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. I, p. 265).

α, β et γ étant liés entre eux par la relation

$$\frac{a}{\alpha^2}+\frac{b}{\beta^2}+\frac{c}{\gamma^2}=0.$$

La cubique polaire d'un point quelconque (ξ, η, ζ) du plan a pour équation

$$x\xi(bz^2+cy^2)+y\eta(cx^2+az^2)+z\zeta(ay^2+bx^2)=0.$$

Remplaçons, dans cette équation, c et z par leurs valeurs tirées des relations précédentes, il viendra, en faisant, pour abréger, $\gamma=1$ et $\zeta=1$,

$$\frac{b(\xi-\alpha)}{\alpha^2}x^3+\left[\frac{2b\xi}{\alpha\beta}-\frac{b(\eta+\beta)}{\beta^2}\right]x^2y$$
$$+\left[\frac{2a\eta}{\alpha\beta}-\frac{a(\xi+\alpha)}{\alpha^2}\right]xy^2+\frac{a(\eta-\beta)}{\alpha^2}y^3=0;$$

ou encore, si l'on pose

$$\xi-\alpha=\mathrm{X} \quad \text{et} \quad \eta-\beta=\mathrm{Y},$$

$$\frac{b\mathrm{X}}{\alpha^2}x^3+\frac{b}{\alpha\beta^2}(2\beta\mathrm{X}-\alpha\mathrm{Y})x^2y$$
$$+\frac{a}{\alpha^2\beta}(2\alpha\mathrm{Y}-\beta\mathrm{X})xy^2+\frac{a\mathrm{Y}}{\beta^2}y^3=0.$$

Si l'on considère la polaire d'un autre point (ξ', η', ζ') du plan, on aura de même, pour déterminer les points où elle rencontre la tangente à la conique H, l'équation

$$\frac{b\mathrm{X}'}{\alpha^2}+\frac{b}{\alpha\beta^2}(2\beta\mathrm{X}'-\alpha\mathrm{Y}')x^2y$$
$$+\frac{a}{\alpha^2\beta}(2\alpha\mathrm{Y}'-\beta\mathrm{X}')xy^2+\frac{\beta^2}{a\mathrm{Y}'}y^3=0,$$

où j'ai posé

$$\xi'-\alpha=\mathrm{X}' \quad \text{et} \quad \eta'-\beta=\mathrm{Y}'.$$

En désignant par I l'invariant quadratique des deux

formes précédentes, on a

$$3\mathrm{I} = \frac{3ab(\mathrm{XY}' - \mathrm{YX}')}{\alpha^2\beta^2} - \frac{ab}{\alpha^3\beta^3}\left[(2\beta\mathrm{X} - \alpha\gamma)(2\alpha\mathrm{Y}' - \beta\mathrm{X}') - (2\beta\mathrm{X}' - \alpha\mathrm{Y}')(2\alpha\mathrm{Y} - \beta\mathrm{X})\right];$$

en effectuant le calcul, on trouve $\mathrm{I} = 0$. Le théorème est donc démontré.

17. Si l'on considère deux points A et B du plan et leurs cubiques polaires relativement à K, ces deux cubiques sont coupées harmoniquement, comme je viens de l'établir, par toutes les droites tangentes à la conique H.

On démontrerait facilement qu'elles sont également coupées harmoniquement par toutes les droites qui passent par le pôle de la droite AB, relativement à cette conique. Pour abréger, je supprime la démonstration de cette proposition, qui, d'ailleurs, est renfermée comme cas particulier dans un théorème général, relatif aux courbes du quatrième ordre, que j'ai donné dans ma Note, déjà citée, *Sur les singularités des courbes de quatrième classe*.

Ce théorème peut s'énoncer ainsi qu'il suit :

Étant donnée une courbe du quatrième degré R, *les tangentes aux vingt-quatre points d'inflexion de cette courbe sont tangentes à une même courbe de quatrième classe* S. *Si l'on considère deux points quelconques* A *et* B *du plan, toute droite menée tangentiellement à la cubique polaire de la droite* AB, *relativement à la courbe de quatrième classe* S, *rencontre les polaires des points* A *et* B, *relativement à la courbe* R, *en deux groupes de trois points, qui forment un système harmonique* (*).

(*) *Loc. cit.*, p. 266. Il est presque inutile de dire qu'à l'endroit cité le théorème est énoncé relativement à une courbe de quatrième classe.

Dans le cas où la courbe R est une courbe K à trois points doubles d'inflexion, la courbe de quatrième classe S se réduit à la conique H, celle-ci étant considérée comme double; d'où l'on déduit facilement les propriétés que j'ai énoncées précédemment.

18. En terminant cet exposé des propriétés spéciales les plus simples des courbes du quatrième degré à trois points doubles d'inflexion, je ferai remarquer que la développée d'une conique ayant trois tangentes doubles de rebroussement, sa courbe corrélative est de l'espèce de celles que je viens d'étudier.

Toutes les propriétés qui précèdent peuvent donc être considérées comme des propriétés des développées des coniques.

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)].

Dans le cas où l'on aurait à la fois $h = k$, $\Theta' = \Theta$, tous les angles seraient conservés, et tous les rapports de longueur seraient égaux entre eux. L'ellipse indicatrice serait un cercle. Une figure infiniment petite de forme quelconque, tracée autour du point que l'on considère, et sa projection seraient semblables.

Enfin, le cas où l'on aurait en même temps $h = k$, $\Theta' = \pi - \Theta$, est celui où les deux angles donnés éprou-

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 145.

veraient le *maximum* d'altération. La première tangente principale, sur la surface à représenter, serait bissectrice de celui de ces deux angles qui est obtus, et il viendrait

$$a = h \operatorname{tang} \frac{\Theta}{2}, \quad b = h \cot \frac{\Theta}{2}.$$

Formules dans lesquelles les directions se trouvent rapportées à d'autres lignes que les tangentes principales.

23. Ayant déterminé en grandeur et en direction les axes de l'ellipse indicatrice, on pourra calculer les diverses altérations d'angles et de longueurs par les formules des numéros 6 à 19. Mais on peut aussi arriver à ce but en partant immédiatement des données Θ, Θ', h et k. Soit φ l'angle d'une direction quelconque avec le côté de Θ suivant lequel le rapport des longueurs est h; soit φ' sa projection; soit r le rapport de longueurs suivant la direction considérée. La relation analogue à

$$hk \sin\Theta' = ab \sin\Theta$$

est ici

$$hr \sin\varphi' = ab \sin\varphi;$$

si l'on multiplie en croix, on trouvera

$$r \sin\Theta \sin\varphi' = k \sin\Theta' \sin\varphi.$$

On a de même

$$r \sin\Theta \sin(\Theta' - \varphi') = h \sin\Theta' \sin(\Theta - \varphi).$$

Des deux dernières équations, il est facile de tirer φ' et r en fonction des données et de l'angle φ.

Quant au rapport des éléments superficiels, il est $\frac{hk \sin\Theta'}{\sin\Theta}$.

24. Ces formules conduisent à des relations très-simples lorsque les directions se trouvent rapportées à l'une des deux droites dont l'angle éprouve le *maximum* d'altération. Ce *maximum* étant représenté, comme plus haut (n° 7), par 2ω, ou l'angle lui-même par $\frac{\pi}{2}+\omega$, appelons c le rapport de longueurs sur les deux droites; soit ψ l'angle que l'une d'elles fait avec une direction quelconque, et soit ψ' la projection de ψ. Il viendra

$$\cot\psi' - \cot\psi = 2\tang\omega,$$
$$r\sin\psi' = c\sin\psi,$$
$$\tang(\psi'+\omega) - \tang(\psi-\omega) = 2\tang\omega,$$
$$r\cos(\psi'+\omega) = c\cos(\psi-\omega).$$

Le rapport des éléments superficiels est c^2.

Séries de couples de courbes satisfaisant à certaines conditions.

25. Nous avons vu (n° 4) que, dans tout mode de représentation où les angles ne sont pas conservés, il existe, sur chacune des deux surfaces, un système unique de deux séries de lignes se coupant à angle droit et dont les projections sur l'autre surface se coupent aussi à angle droit. En chaque point, le rapport de longueurs a son *maximum* et son *minimum* sur les deux lignes de séries différentes qui viennent s'y rencontrer (n° 14). On peut se proposer de déterminer les courbes qui appartiennent à l'une ou à l'autre série. On peut aussi chercher les deux séries de courbes dont les intersections produisent en chaque point l'angle qui éprouve la plus grande altération (n° 12); on sait que, sur chacune, le rapport de longueurs est constamment égal à la

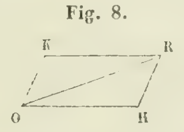
moyenne géométrique entre ses valeurs *maxima* et *minima* (n° 17), de sorte que, si le mode de projection conserve les aires, ces courbes se trouveront projetées en vraie grandeur. Plus généralement, on peut se proposer de déterminer les courbes sur lesquelles le rapport de longueurs varie suivant une loi donnée, ainsi que les systèmes de courbes dont les intersections produisent, sur l'une et l'autre surface, des angles variant aussi d'après une loi donnée.

26. Les coordonnées l et m, dont nous avons fait usage jusqu'à présent, définissent respectivement deux séries de courbes tracées sur la première surface, ainsi que leurs projections sur la seconde; les deux mêmes séries de couples de courbes se trouveront également définies par deux coordonnées, fonctions, l'une de l seulement, l'autre de m seulement, les deux fonctions étant du reste arbitraires; enfin, pour caractériser une troisième série de couples de courbes, on peut avoir recours à un troisième paramètre variable, p, ou à une fonction arbitraire de ce paramètre : dans les questions qui ont été énoncées tout à l'heure, il s'agit de déterminer p en fonction de l et de m, de manière que les nouvelles courbes remplissent certaines conditions. Ainsi effectuée, la recherche de ces courbes dépendrait d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont la forme se trouve suffisamment indiquée par ce qui précède; on voit en effet qu'elle serait privée de second membre, et que sa résolution se ramènerait à l'intégration de l'équation différentielle $dp = 0$ et à celle d'une autre équation différentielle entre l et m seulement; cette dernière, qui exprime que, pour tous les points de chaque courbe et pour leurs projections, la fonction de l et de m qui représente p reste constante peut servir

aussi bien que p à caractériser les deux séries de couples de courbes; la méthode que nous suivrons consistera à la chercher directement. Si l'on voulait ensuite avoir p, il faudrait, ou intégrer et résoudre par rapport à la constante, ou faire passer tous les termes dans un seul membre et multiplier leur ensemble par l'un des facteurs qui le rend différentielle exacte, ce qui donnerait l'expression de dp. Ainsi envisagées, les questions que nous voulons résoudre se trouvent ramenées à la suivante.

27. Considérons, sur une seule des deux surfaces, le canevas de parallélogrammes infiniment petits formés par les deux séries de courbes qui correspondent respectivement aux coordonnées l et m, et supposons qu'il s'agisse de trouver une troisième série de courbes cou-

Fig. 8.



pant celles de la seconde série sous un angle variable φ, connu en fonction des coordonnées l et m du point d'intersection. Soit OR (*fig.* 8) un élément infiniment petit de l'une des courbes de la troisième série, et OHRK le parallélogramme du canevas qui a pour diagonale OR. On aura, d'après la notation déjà adoptée (n° 20)

$$\mathrm{OH} = \mathrm{L}\,dl,\quad \mathrm{OK} = \mathrm{M}\,dm,\quad \mathrm{HOR} = \varphi,\quad \mathrm{KOR} = \Theta - \varphi;$$

mais le triangle OHR donne

$$\mathrm{OH}\sin\mathrm{HOR} = \mathrm{HR}\sin\mathrm{ORH};$$

il vient donc

$$\mathrm{L}\sin\varphi\,dl - \mathrm{M}\sin(\Theta - \varphi)\,dm = 0;$$

telle est l'équation différentielle des courbes cherchées, pour le cas où l et m varient dans le même sens lorsqu'on se déplace sur OR; dans le cas contraire, il faudrait changer le signe du second terme; l'équation précédente s'appliquera cependant à tous les cas si Θ représente celui des quatre angles sur les côtés duquel l et m vont en augmentant, et si φ est compté positivement à partir du premier de ces côtés, et dans le sens de la rotation du premier vers le second.

28. Cela posé, si l'on veut avoir les équations différentielles des deux séries de lignes qui sont orthogonales sur l'une et l'autre surface, il suffira d'imaginer que OR se confond successivement avec les deux tangentes principales qui partent du point O, ce qui revient à remplacer φ par u, puis par $\frac{\pi}{2} + u$, l'angle u étant celui qui se trouve donné, en fonction de l et de m, par les formules du n° 21; les valeurs correspondantes de $\Theta - \varphi$ sont respectivement v et $v - \frac{\pi}{2}$; de sorte que les deux séries de couples de lignes orthogonales seront fournies par les équations différentielles

$$\mathrm{L} \sin u\, dl - \mathrm{M} \sin v\, dm = 0, \quad \mathrm{L} \cos u\, dl + \mathrm{M} \cos v\, dm = 0.$$

29. S'il s'agit des lignes dont l'angle éprouve en chaque point l'altération *maxima*, il faudra faire successivement $\varphi = u + \mathrm{U}$, $\Theta - \varphi = v - \mathrm{U}$, et $\varphi = u - \mathrm{U}$, $\Theta - \varphi = v + \mathrm{U}$, les angles u et v étant, comme tout à l'heure, ceux du n° 21, et U l'angle du n° 7 pour lequel on a

$$\operatorname{tang} \mathrm{U} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

En effectuant les substitutions, on obtient les équations différentielles

$$L \sin(U + u)\,dl + M \sin(U - v)\,dm = 0,$$
$$L \sin(U - u)\,dl + M \sin(U + v)\,dm = 0.$$

30. Lorsque le canevas primitif a ses angles droits sur la première surface, les équations des lignes qui sont orthogonales à la fois sur la première et sur la seconde deviennent

$$L \tang u\,dl - M\,dm = 0, \quad L \cot u\,dl + M\,dm = 0,$$

et celles des lignes dont l'angle subit le maximum d'altération,

$$L \tang(U + u)\,dl - M\,dm = 0,$$
$$L \tang(U - u)\,dl + M\,dm = 0.$$

Celles-ci se simplifieront encore si, ayant déterminé préalablement les coordonnées p et q des deux séries de lignes qui sont orthogonales sur les deux surfaces, on en fait usage, au lieu d'employer les coordonnées l et m du canevas primitif; on aura alors $u = 0$, et les dernières équations se réduiront à

$$P\sqrt{a}\,dp - Q\sqrt{b}\,dq = 0, \quad P\sqrt{a}\,dp + Q\sqrt{b}\,dq = 0,$$

P et Q représentant les coefficients de dp et de dq dans les expressions des côtés des rectangles infiniment petits qui composent le nouveau canevas sur la première surface.

Il suit de là que, dans le même système de coordonnées, et pour un mode de représentation conservant les surfaces, les équations des lignes qui se projettent en vraie grandeur sont

$$a P\,dp - Q\,dq = 0, \quad a P\,dp + Q\,dq = 0.$$

31. Dans les questions précédentes, nous n'avons considéré que des valeurs particulières du rapport de longueurs; supposons maintenant que l'on veuille déterminer les deux séries de courbes sur lesquelles il se trouve donné par une fonction connue h_1 de l et de m. Soit u_1 l'un des deux angles, égaux entre eux, que la première tangente principale fait, en un point quelconque, avec les deux courbes de séries différentes qui viennent s'y rencontrer; nous obtiendrons cet angle en remplaçant, dans l'une des trois formules en a, b, h et u du n° 21, h par h_1 et u par u_1. Les valeurs de φ pour les deux séries de courbes sont d'ailleurs $u + u_1$ et $u - u_1$. Les équations différentielles que l'on cherche peuvent donc s'écrire immédiatement.

32. Enfin, soit proposé de trouver deux séries de courbes se coupant, ainsi que leurs projections, sous des angles exprimés par deux fonctions connues des coordonnées de chaque point d'intersection. Des formules du n° 21, il résulte que les expressions

$$\frac{hk\sin\Theta'}{\sin\Theta},\quad \frac{h^2 + k^2 - 2hk\cos\Theta\cos\Theta'}{\sin^2\Theta}$$

sont des invariants du mode de représentation employé, de sorte que, si Θ et Θ' sont donnés, h et k le seront aussi; la question actuelle se ramène donc à la précédente. Elle admet deux solutions, à moins que les angles donnés ne soient droits.

Doubles canevas satisfaisant à certaines conditions.

33. Un double canevas formé par deux séries de lignes sur l'une des surfaces et par leurs projections sur l'autre peut être défini par deux coordonnées, l et m,

convenablement choisies parmi celles qui correspondent respectivement à ces deux séries de lignes. Si l'on substitue à l une fonction de l et à m une fonction de m, on obtiendra un double canevas différent du premier, mais ayant les mêmes angles. Par exemple, bien qu'il n'existe, pour un mode de représentation donné, que deux séries de couples de lignes orthogonales, il y a une infinité de doubles canevas orthogonaux, dont les coordonnées sont respectivement des fonctions arbitraires des coordonnées de l'un d'entre eux. Ce qui varie de l'un à l'autre, c'est le rapport des deux côtés de chaque rectangle infiniment petit ; il varie toutefois de telle manière que le quotient des valeurs qu'il prend pour deux rectangles correspondants sur les deux surfaces soit constamment égal à $\frac{b}{a}$. De cette dernière remarque, il résulte que l'on ne saurait profiter de l'indétermination des fonctions arbitraires pour assigner à ces deux rectangles des formes déterminées ; et même, sur une seule des deux surfaces, on ne pourra faire varier le rapport des deux côtés de chaque rectangle suivant une loi donnée qu'autant que la fonction des coordonnées qui exprime cette loi remplira une certaine condition, qu'il serait facile d'établir.

34. Si l et m sont les coordonnées d'un double canevas, $l+m$ et $l-m$ seront celles du double canevas que formeraient les diagonales des parallélogrammes du premier. En effet, pour l'une des diagonales, le rapport de $\sin\varphi$ à $\sin(\Theta-\varphi)$, qui figure dans l'équation différentielle du n° 27, est égal à $\frac{M}{L}$, et pour l'autre à $-\frac{M}{L}$, de sorte que cette équation donne successivement, pour les deux séries de couples de courbes du nouveau canevas,

$$dl - dm = 0, \quad dl + dm = 0.$$

Lorsque le premier canevas se composera de rectangles, le second sera formé de losanges, et réciproquement.

Cela posé, appelons Φ et Ψ deux fonctions arbitraires, et soient p et q les coordonnées d'un double canevas orthogonal ; celles des autres canevas de rectangles seront $\Phi(p)$ et $\Psi(q)$; celles des doubles canevas de losanges seront $\Phi(p) + \Psi(q)$ et $\Phi(p) - \Psi(q)$.

De même, soient r et s les coordonnées d'un double canevas de losanges ; celles des doubles canevas orthogonaux seront $\Phi(r+s)$ et $\Psi(r-s)$; celles des doubles cavenas de losanges seront

$$\Phi(r+s) + \Psi(r-s) \quad \text{et} \quad \Phi(r+s) - \Psi(r-s).$$

Les tangentes principales sont bissectrices des angles de chaque double canevas de losanges ; de plus, si l'on appelle Ω et Ω' deux de ces angles se correspondant d'une surface à l'autre dans le double canevas qui a pour coordonnées $\Phi(p) + \Psi(q)$, $\Phi(p) - \Psi(q)$, il viendra

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega}{2} = \frac{Q}{P}\,\frac{\Phi'(p)}{\Psi'(q)}, \quad \operatorname{tang}\frac{\Omega'}{2} = \frac{b\,Q}{a\,P}\,\frac{\Phi'(p)}{\Psi'(q)};$$

P et Q désignant, comme précédemment, les coefficients de dp et de dq dans les expressions des côtés de chaque rectangle infiniment petit du double canevas orthogonal défini par les coordonnées p et q. On voit qu'en général il ne sera pas possible de disposer des deux fonctions arbitraires de manière que les angles des losanges varient suivant une loi donnée, même sur une seule des deux surfaces.

Dans les doubles canevas formés par les lignes dont l'angle éprouve en chaque point la plus grande altération, les demi-angles des parallélogrammes ont pour tan-

gentes $\sqrt{\frac{a}{b}}$ sur l'une des surfaces, et $\sqrt{\frac{b}{a}}$ sur l'autre. Pour que l'un d'eux soit composé de losanges sur la première surface, il faut que $\frac{a}{b}$ soit le produit de $\frac{Q}{P}$, qui est une fonction donnée de p et de q, par deux autres fonctions, l'une de p seulement, l'autre de q seulement. Alors le canevas sera aussi formé de losanges sur la seconde surface.

35. Lorsque le rapport de P à Q est le produit d'une fonction de p par une fonction de q, on peut choisir Φ et Ψ, de manière que l'on ait

$$\frac{P}{\Phi'(p)} = \frac{Q}{\Psi'(q)},$$

ce qui, d'une part, rendra égaux les coefficients des différentielles des coordonnées dans les expressions des longueurs des côtés des rectangles déterminés sur la première surface par le double canevas orthogonal répondant à $\Phi(p)$ et $\Psi(q)$, et, d'autre part, donnera $\Omega = \frac{\pi}{2}$ pour le double canevas de losanges répondant à $\Phi(p) + \Psi(q)$ et $\Phi(p) - \Psi(q)$. Il y aura donc alors un double canevas orthogonal et un double canevas de losanges décomposant la première surface en carrés ; l'un sera formé par les diagonales de l'autre.

La condition analogue pour la seconde surface porterait sur aP et bQ.

Il ne peut y avoir de double canevas décomposant à la fois les deux surfaces en carrés, à moins que le mode de projection ne conserve les angles.

Applications.

36. Une surface de révolution étant donnée, imaginons que, pour la représenter sur un plan, on développe, en vraie grandeur, l'un de ses méridiens suivant une droite, puis ses parallèles suivant d'autres droites perpendiculaires à la première. On obtiendra ainsi une projection qui jouira de la propriété de conserver les superficies; car, à chaque rectangle infiniment petit formé par deux méridiens et deux parallèles de la surface, correspondra sur la carte un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur.

Soient, en un point quelconque, l l'angle de la tangente au méridien avec l'axe de la surface, r le rayon du parallèle, ρ le rayon de courbure du méridien; soient encore m l'angle du méridien du point considéré avec celui dont la projection est rectiligne, et s la longueur de l'arc de ce dernier mesurée à partir d'un parallèle convenu. Supposons, pour fixer les idées, que cet arc, dans le voisinage du point que l'on considère, tourne sa concavité vers l'axe de la surface, et que r diminue quand s augmente. Enfin appelons θ l'altération éprouvée sur la carte par l'angle du méridien avec le parallèle, en conservant la notation déjà adoptée pour les autres quantités résultant de la déformation. Aux coordonnées l et m correspond un double canevas formé de méridiens et de parallèles. Les variables r, ρ et s sont des fonctions connues de l. Nous avons d'abord à déterminer θ, h, k, a, b, ..., en fonction de l et de m.

Si l'on projette un arc infiniment petit de la section méridienne sur le rayon du parallèle qui passe par une de ses extrémités, et l'arc correspondant du méridien de la carte sur la droite qui représente ce parallèle, on for-

mera deux triangles rectangles qui donneront respectivement

$$\frac{dr}{ds} = -\sin l, \quad \operatorname{tang}\theta = -m\frac{dr}{ds};$$

d'où l'on conclut

$$\operatorname{tang}\theta = m \sin l.$$

Les aires étant conservées, le rapport de surfaces, $hk\cos\theta$, doit se réduire à l'unité; et, comme déjà le rapport de longueurs k sur le parallèle est égal à un, il viendra

$$h = \operatorname{séc}\theta = \sqrt{1 + m^2\sin^2 l}, \quad k = 1.$$

Nous connaissons ainsi deux diamètres conjugués de l'ellipse indicatrice; les demi-axes de cette ellipse, qui sont ici inverses l'un de l'autre, seront fournis par les deux équations

$$a^2 + b^2 = 2 + m^2\sin^2 l, \quad ab = 1,$$

desquelles on tire

$$a = \sqrt{1 + \frac{m^2}{4}\sin^2 l} + \frac{m}{2}\sin l,$$

$$b = \sqrt{1 + \frac{m^2}{4}\sin^2 l} - \frac{m}{2}\sin l.$$

Il en résulte, pour la tangente de la moitié de la plus grande altération d'angle,

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{m}{2}\sin l = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta.$$

Chacune des deux directions dont l'angle est le plus altéré fait, avec la première tangente principale, un angle U pour lequel on a

$$U = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}, \quad \operatorname{tang} U = a.$$

Les rapports de longueurs suivant ces deux directions

étant égaux à l'unité, l'une d'elles se confond ici avec la tangente au parallèle. Cette remarque nous dispense d'avoir recours aux formules du n° 21 pour calculer les angles u et v de la première tangente principale avec la tangente au méridien et la tangente au parallèle; nous pouvons écrire immédiatement

$$u = \frac{\pi}{2} - U = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2}, \quad \tang u = b, \quad v = U, \quad \tang v = a.$$

Sur la carte, on aura, pour les angles correspondants,

$$U' = u, \quad \tang u' = b^3, \quad v' = u.$$

La tangente au méridien de la carte donnant, avec le parallèle, les directions de deux diamètres conjugués de l'ellipse indicatrice, le grand axe de cette ellipse passera à l'intérieur de l'angle aigu formé par ces deux lignes et la première tangente principale, à l'intérieur de l'angle droit dont cet angle aigu est la projection.

Les côtés de chaque rectangle infiniment petit du canevas tracé sur la surface de révolution ont pour longueurs les valeurs absolues de ds, ou $\rho\, dl$, et de $r dm$; d'ailleurs, sur la première tangente principale, les accroissements de l et de m sont ici de signes contraires; les deux couples de séries de lignes orthogonales seront donc fournis (n° 30) par les équations différentielles

$$\rho dl + a r dm = 0, \quad a \rho dl - r dm = 0,$$

dans lesquelles a doit être remplacé par sa valeur ci-dessus en fonction de l et de m. On peut encore prendre pour variables indépendantes s et m, ou bien r et m; alors les équations différentielles seront

$$ds + a r dm = 0, \quad a ds - r dm = 0,$$

et il faudra substituer à $\sin l$, dans a, l'expression de $-\frac{dr}{ds}$ en fonction de s, ou bien en fonction de r.

A cause de $u = \frac{\pi}{2} - U$, les équations des lignes qui se projettent en vraie grandeur se réduisent à

$$dl = 0, \quad \cot 2U\, ds + r\, dm = 0.$$

La première représente les parallèles, solution qui résulte de la définition même du mode de représentation. Comme on a

$$\cot 2U = -\tang\omega = -\frac{m}{2}\sin l = \frac{m}{2}\frac{dr}{ds},$$

la seconde équation peut s'écrire

$$m\, dr + 2r\, dm = 0$$

et a pour intégrale

$$rm^2 = \text{const.}$$

Ainsi $\Phi(s)$ et $\Psi(rm^2)$ expriment les coordonnées des canevas dont les parallélogrammes ont des côtés de même longueur sur la surface et sur la carte.

37. Comme second exemple, nous prendrons encore la représentation d'une surface quelconque de révolution sur un plan. Cette fois, les méridiens seront tous figurés par des droites partant d'un même point et faisant entre elles des angles égaux à ceux des méridiens eux-mêmes, les parallèles par des circonférences ayant ce point pour centre. Nous appellerons R le rayon de l'une quelconque de ces circonférences ; R sera une fonction connue de l'arc de méridien s, sur laquelle nous ne ferons aucune hypothèse ; nous désignerons par ζ la dérivée de son logarithme népérien par rapport à s. Soient toujours r le rayon du parallèle de la surface et m l'angle d'un méridien quelconque avec un méridien convenu.

Les axes de l'ellipse indicatrice sont partout dirigés suivant la tangente au méridien et la tangente au paral-

lèle ; ils ont pour longueurs $\frac{dR}{ds}$, abstraction faite du signe, et $\frac{R}{r}$.

La tangente de l'angle du méridien avec l'une ou l'autre des deux lignes dont l'angle éprouve la plus grande altération est $\sqrt{r\zeta}$.

Les doubles canevas orthogonaux auront pour coordonnées $\Phi(s)$ et $\Psi(m)$; l'un d'entre eux, celui qui correspond à

$$\Phi(s) = \int \frac{ds}{r}, \quad \Psi(m) = m,$$

sera formé de carrés sur la surface de révolution.

Les doubles canevas de losanges auront pour coordonnées $\Phi(s) + \Psi(m)$ et $\Phi(s) - \Psi(m)$. Celui d'entre eux pour lequel Φ et Ψ satisfont aux relations précédentes décomposera la surface en carrés ; il sera tracé par deux séries de loxodromies inclinées à 45 degrés sur les méridiens.

Si l'on pose

$$\sigma = \int \sqrt{\frac{\zeta}{r}}\, ds,$$

les doubles canevas auxquels donnent lieu les lignes dont l'angle éprouve le *maximum* d'altération seront fournis par les coordonnées $\Phi(\sigma + m)$ et $\Psi(\sigma - m)$; celui qui répond aux coordonnées $\sigma + m$, $\sigma - m$ est en même temps un double canevas de losange.

Parmi les systèmes de projections que nous venons de considérer, il y en a une infinité qui conservent les aires : ce sont ceux dans lesquels on prend

$$R = \sqrt{2\int r\, ds},$$

d'où résulte

$$\sigma = \int \frac{ds}{R} = \int \frac{dR}{r}.$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. V. VIDAL,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = F(x) = 0$$

une équation du quatrième degré.

La première fonction de Sturm est

$$\begin{vmatrix} B & 2Cx^2 + 3Dx + 4E \\ 4A & 3Bx^2 + 2Cx + D \end{vmatrix}$$
$$= (3B^2 - 8AC)x^2 + 2(BC - 6AD)x + BD - 16AE = \varphi(x).$$

En fonction des coefficients de $\varphi(x)$, l'équation proposée peut s'écrire

$$(4Ax + B)^4 - 2(3B^2 - 8AC)(4Ax + B)^2 + \frac{8}{3}[B(3B^2 - 8AC) - 4A(BC - 6AD)](4Ax + B) - 16A^2(BD - 16AE) + 8AB(BC - 6AD) - B^2(3B^2 - 8AC) = 0.$$

I. Supposons que les trois coefficients de la première fonction de Sturm soient identiquement nuls, la proposée se réduit à $(4Ax + B)^4 = 0$. Il y a quatre racines réelles, égales entre elles.

II. Soient $3B^2 - 8AC = 0$, $BC - 6AD = 0$; l'équation proposée se réduit à

$$(4Ax + B)^4 - 16A^2(BD - 16AE) = 0.$$

Les quatre racines sont imaginaires dans le cas de $BD - 16AE < 0$.

Pour $BD - 16AE > 0$, il y a deux racines réelles que l'on trouve par l'extraction de deux racines carrées successives.

III. Supposons que l'on ait seulement $3B^2 - 8AC = 0$. La proposée se réduit à

$$(4Ax + B)^4 - \frac{32}{3}A(BC - 6AD)(4Ax + B)$$
$$- 16A^2(BD - 16AE) + 8AB(BC - 6AD) = 0.$$

La valeur minimum du premier membre a lieu pour la valeur de x donnée par

$$(4Ax_1 + B)^3 - \frac{8}{3}A(BC - 6AD) = 0;$$

d'où

$$4Ax_1 + B = 2\sqrt[3]{\frac{A(BC - 6AD)}{3}},$$

et cette valeur minimum du premier membre sera

$$- 8A(BC - 6AD)\,2\sqrt[3]{\frac{A(BC - 6AD)}{3}}$$
$$- 16A^2(BD - 16AE) + 8AB(BC - 6AD).$$

Si elle est négative, la proposée admettra deux racines réelles, l'une plus grande, l'autre plus petite que la valeur ci-dessus de x, ainsi qu'on le voit facilement. Si elle est positive, les quatre racines sont imaginaires.

IV. Considérons maintenant le cas général où aucun des coefficients de la fonction de Sturm n'est nul.

Si les racines de l'équation

$$(3B^2 - 8AC)x^2 + 2(BC - 6AD)x + (BD - 16AE) = 0$$

sont imaginaires, ou égales entre elles, la première fonction de Sturm ne changera jamais de signe, quelque valeur que l'on attribue à x, et il suffira, pour connaître le nombre des racines réelles et pour les séparer, de considérer les trois fonctions

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$
$$4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D,$$
$$(3B^2 - 8AC)x^2 + 2(BC - 6AD)x + (BD - 16AE).$$

Pour $3B^2 - 8AC < 0$, les quatre racines sont imaginaires ; pour $3B^2 - 8AC > 0$, deux racines sont réelles.

V. Si les deux racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont réelles et inégales, on les substitue dans la proposée. Si l'une d'elles satisfait à l'équation proposée, elle est une racine double, puisque dans ce cas l'équation $F'(x) = 0$ est aussi satisfaite d'après la relation fondamentale

$$16A.F(x) = F'(x)(4Ax + B) - 16A\varphi(x).$$

Deux des racines de l'équation $F(x) = 0$ étant connues, les deux autres se trouveront par la résolution d'une équation du second degré.

VI. Il ne reste plus à considérer que le cas où les deux racines de $\varphi(x) = 0$ sont réelles et inégales, et où l'équation $F(x) = 0$ n'admet pas de racines égales.

Les racines de $F(x) = 0$, si elles sont réelles, sont séparées par les racines des deux équations

$$4Ax + B = 0, \quad \varphi(x) = 0,$$

l'une du premier, l'autre du second degré (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872, p. 404, etc.). Substituant donc les solutions des deux dernières équations dans $F(x) = 0$, les signes des divers résultats indique-

ront le nombre des racines réelles, dont on pourra approcher de plus en plus à l'aide d'une quelconque des méthodes bien connues d'approximation numérique.

VII. Si l'on voulait faire usage des deux dernières fonctions de Sturm, leur calcul s'effectuerait bien simplement, car elles peuvent être mises sous la forme

$$S\frac{d\varphi}{dx} + T(4Ax + B) = 0, \quad 4S^3 - T^2 = 0,$$

en posant $S = 12AE - 3BD + C^2$,

$$2T = \begin{vmatrix} 6A & 3B & C \\ 3B & 4C & 3D \\ C & 3D & 4E \end{vmatrix}.$$

On voit donc que, dans tous les cas possibles, la résolution d'une équation quelconque du quatrième degré se fait très-simplement à l'aide de l'équation du second degré $\varphi(x) = 0$, dont les coefficients, ayant une forme très-mnémonique, se calculent à simple vue par de pures opérations d'Arithmétique élémentaire.

INSCRIPTION DANS LE CERCLE DES QUATRE POLYGONES RÉGULIERS DE TRENTE COTÉS;

Par M. Georges DOSTOR.

---

1. On sait qu'il existe quatre polygones réguliers de 15 côtés. Si le rayon du cercle circonscrit à ces polygones est égal à l'unité, les côtés des polygones, pris dans un ordre inverse, seront

$$2\sin\frac{7\pi}{15}, \quad 2\sin\frac{4\pi}{15}, \quad 2\sin\frac{2\pi}{15} \quad \text{et} \quad 2\sin\frac{\pi}{15}.$$

Les trois premiers polygones sont étoilés, le dernier est convexe.

Puisque 15 est un nombre impair, il existera aussi quatre polygones réguliers de 30 côtés; ces côtés sont, dans l'ordre croissant,

$$2\sin\frac{\pi}{30},\quad 2\sin\frac{7\pi}{30},\quad 2\sin\frac{11\pi}{30}\quad \text{et}\quad 2\sin\frac{13\pi}{30}.$$

Le premier polygone est convexe, et les trois autres sont étoilés.

Si nous comparons les sinus, qui, dans ces deux lignes, se correspondent verticalement, nous verrons que leurs arcs sont complémentaires.

Nous avons par suite les égalités

$$\sin^2\frac{\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{7\pi}{15},\quad \sin^2\frac{7\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{4\pi}{15},$$

$$\sin^2\frac{11\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{2\pi}{15},\quad \sin^2\frac{13\pi}{30} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{15}.$$

Les côtés des quatre pentédécagones réguliers étoilés étant (*)

$$2\sin\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\right),$$

$$2\sin\frac{4\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3}\right),$$

$$2\sin\frac{2\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$

$$2\sin\frac{\pi}{15} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3}\right),$$

(*) Voir le *Traité de Géométrie élémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse, 3e édition, 1874, Ire Partie, page 171. Les côtés des quatre pentédécagones réguliers y sont calculés géométriquement par une méthode aussi simple qu'élégante, et d'une facilité bien remarquable.

on obtient immédiatement pour les carrés des côtés des quatre polygones réguliers de 30 côtés

$$4\sin^2\frac{\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$4\sin^2\frac{7\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2,$$

$$4\sin^2\frac{11\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)^2,$$

$$4\sin^2\frac{13\pi}{30}=4-\frac{1}{16}\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)^2.$$

Si nous effectuons, que nous réduisions, nous obtiendrons, en extrayant la racine carrée,

$$2\sin\frac{\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$2\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}},$$

$$2\sin\frac{11\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36-4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}},$$

$$2\sin\frac{13\pi}{30}=\frac{1}{4}\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Les expressions sous les radicaux sont des carrés. On a, en effet, dans $2\sin\frac{\pi}{10}$,

$$\begin{aligned}&36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\\&=30-6\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+6+2\sqrt{5}\\&=\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{3}(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}+(\sqrt{5}+1)^2\\&=\left[\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)\right]^2;\end{aligned}$$

et ainsi des trois autres quantités analogues.

Il s'ensuit que les côtés des quatre polygones réguliers

de 30 côtés sont

$$2\sin\frac{30}{\pi}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}\quad 1\right),$$

$$2\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right),$$

$$2\sin\frac{11\pi}{30}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right),$$

$$2\sin\frac{13\pi}{30}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right).$$

2. L'inspection de ces formules fait voir que :

1° *La différence* $2\sin\frac{11\pi}{30}-2\sin\frac{\pi}{30}$ *entre les côtés du second polygone étoilé et du polygone convexe est égale au côté* $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$ *du décagone régulier étoilé ;*

2° *La différence* $2\sin\frac{13\pi}{30}-2\sin\frac{7\pi}{30}$ *entre les côtés des deux autres polygones étoilés est égale au côté* $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ *du décagone régulier convexe.*

3. Cette méthode peut être appliquée avec avantage au calcul des côtés des deux pentagones réguliers.

En effet, les côtés des deux décagones réguliers, l'un *étoilé* et l'autre *convexe*, sont

$$2\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right),\quad 2\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right);$$

et, comme les côtés des deux pentagones réguliers, l'un *convexe* et l'autre *étoilé*, sont

$$2\sin\frac{\pi}{5}=2\cos\frac{3\pi}{10},\quad 2\sin\frac{2\pi}{5}=2\cos\frac{\pi}{10},$$

on trouve tout de suite, pour ces côtés, les valeurs

$$2\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(6+2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$2\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2} = \sqrt{4 - \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1}{2}\,2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Dans cette méthode, on peut se dispenser d'avoir recours à la Trigonométrie. Il suffit de considérer des triangles rectangles qui ont pour hypoténuse le diamètre du cercle.

DÉTERMINATION DE CERTAINS CAS GÉNÉRAUX OU L'ÉQUATION $x^3 \pm a = y^2$ N'ADMET PAS DE SOLUTION EN NOMBRES ENTIERS;

Par M. E. de JONQUIÈRES.

I. Tandis que la solution complète, en nombres entiers, de l'équation indéterminée à deux inconnues a été trouvée depuis longtemps, on ne possède encore qu'un petit nombre de résultats concernant les équations à deux indéterminées dans lesquelles les inconnues, ou seulement l'une d'elles, entrent à un degré supérieur au second, comme cela a lieu, par exemple, dans l'équation $x^3 \pm a = y^2$, et ces résultats ne semblent être reliés entre eux par aucune loi simple.

Tantôt, pour certaines valeurs du nombre donné a, positives ou négatives, on trouve aisément quelques

solutions isolées, mais sans pouvoir dire si le nombre des solutions possibles est limité ou infini. L'équation $x^3 + 8 = y^2$, qui admet les solutions

$$x = -2,\ 1,\ 2,\ 46,$$
$$y = \ \ 0,\ 3,\ 4,\ 312,$$

est dans ce cas, avec une infinité d'autres.

D'autres fois, mais rarement, on démontre qu'il n'existe qu'une seule solution. C'est ce qui a été fait par Fermat, Euler et Legendre pour les équations $x^3 - 2 = y^2$, $x^3 - 4 = y^2$; par M. Gerono, pour $x^3 + 1 = y^2$; par le P. Pepin, S. J., pour quelques autres, parmi lesquelles je citerai $x^3 - 49 = y^2$, $x^3 - 81 = y^2$, $x^3 - 121 = y^2$.... [*Voir*, dans le tome I (3ᵉ série) du *Journal de Mathématiques*, un important article de ce savant auteur « sur certains nombres complexes », et notamment, à la page 345 et aux suivantes, une étude sur l'équation $x^3 - a = y^2$].

Tantôt l'équation exclut les valeurs paires des indéterminées, ou seulement d'une seule; l'équation $x^3 + 15 = y^2$, qui est satisfaite par les systèmes de valeurs

$$x = 1,\ \ 109,\ \ldots,$$
$$y = 4,\ 1138,\ \ldots$$

est du nombre de ces dernières. L'autre cas se présente chaque fois que a est double d'un impair, parce qu'il y a alors incongruence entre les deux membres de l'équation.

Tantôt enfin aucune solution n'est possible. Le P. Pepin a examiné, dans le Mémoire précité, diverses catégories de valeurs de la constante a, pour lesquelles cette circonstance se présente et se démontre *a priori*. C'est une étude du même genre qui fait l'objet de la

présente Note. Je me propose d'y faire connaître quelques catégories, nouvelles, je crois, comprenant chacune une infinité de cas particuliers, où l'impossibilité d'une solution en nombres entiers est démontrée.

II. L'équation que je considère est $x^3 + a = y^2$. L'impossibilité d'une solution en nombres entiers (x pouvant, ainsi que a, être positif ou négatif) dépend de la valeur de a, et se présente toujours, comme on va le voir, dans les trois cas suivants :

1° Lorsque a est égal au cube, diminué de 4, d'un nombre c (positif ou négatif), ayant l'une des trois formes $8b + 1$, $8b + 3$, $8b + 7$ en valeur absolue et abstraction faite de son signe;

2° Lorsque a est égal au cube d'un nombre c (positif ou négatif), ayant en valeur absolue, et abstraction faite de son signe, l'une des trois formes $8b + 3$, $8b + 5$, $8b + 7$, ce cube étant diminué d'une puissance de 4 autre que 4 lui-même ;

3° Lorsque a est égal au cube, diminué de 1, d'un nombre c impairement pair, $c = 2(2d + 1)$, positif ou négatif.

Examinons successivement ces trois catégories de valeurs de a.

III. En premier lieu, soit, par exemple,

$$a = (8b + 1)^3 - 4.$$

On voit d'abord que l'équation $x^3 \pm c^3 - 4 = y^2$ n'admet pour x aucune valeur paire ; car, dans cette hypothèse, le premier membre aurait la forme $8n \mp 3$, et ne s'accorderait pas avec le second membre qui, y étant alors impair, aurait la forme $8n + 1$.

x ne pouvant être qu'impair et y pair, écrivons ainsi l'équation donnée, $x^3 + c^3 = 4(l^2 + 1)$, en faisant

$y = 2t$; puis, réduisant le premier membre en facteurs,

$$(x+c)(x^2 - cx + c^2) = 4(t^2 + 1).$$

Le deuxième facteur du premier membre est impair; donc $x+c$ est un multiple de 4 et, par suite, si l'on suppose d'abord c positif, x est de la forme $4n-1$. Cela étant, le facteur $(x^2 - cx + c^2)$ est, à cause de $c = 8b+1$, de la forme $4k-1$. Puisque ce facteur ne divise pas le facteur 4 du second membre, il devrait diviser l'autre, qui est la somme de deux carrés premiers entre eux; donc il devrait être lui-même décomposable en une somme de deux carrés, ce qui est impossible puisqu'il a la forme $4k-1$.

Lorsque c est négatif, x est de la forme $4n+1$, le terme $-cx$ change de signe, et la conclusion reste la même.

L'équation $x^3 \pm (8b+1)^3 - 4 = y^2$ n'a donc aucune solution en nombres entiers, et une démonstration analogue, que je supprime pour abréger, conduit à la même conclusion pour les deux autres cas, $c = 8b+3$ et $c = 8b+7$.

IV. En second lieu, soit d'abord, par exemple,

$$a = (8b+5)^3 - 4^2.$$

On voit, comme ci-dessus, que dans l'équation donnée x ne peut être pair. Cela posé, y pair peut être égal, soit à $2t$ (t impair), soit à $4r$, r étant indistinctement pair ou impair.

Dans la première de ces deux hypothèses, on a, en décomposant en facteurs,

$$(x+c)(x^2 - cx + c^2) = 4(t^2 + 4).$$

$(x+c)$ est multiple de 4, puisque le second facteur est

impair. Donc, en supposant d'abord c positif, x est de la forme $4k - c$, ou $4k - 8b - 5$, c'est-à-dire $4n - 1$. Il en est par conséquent de même de $(x^2 - cx + c^2)$, qui ne saurait, par ce motif, diviser, comme il devrait le faire, $t^2 + 4$, somme de deux carrés premiers entre eux, puisque t est impair. Donc il n'y a aucune solution possible.

Dans la seconde hypothèse, celle de y pairement pair, on peut écrire

$$(x + c)(x^2 - cx + c^2) = 16(r^2 + 1);$$

$x + c$ devant être un multiple de 16, puisque l'autre facteur du premier membre est impair, x (en supposant encore c positif) a la forme $4n - 1$. Il en est donc de même de $(x^2 - cx + c^2)$, et par conséquent ce facteur ne peut diviser la somme $r^2 + 1$ de deux carrés premiers entre eux.

En résumé, il n'y a de solution possible, ni dans l'une, ni dans l'autre hypothèse.

Lorsque c est négatif, x a la forme $4n + 1$, le terme cx change de signe, et la conclusion demeure la même.

Si, au lieu de prendre, comme ci-dessus, $a = c^3 - 16$, on suppose $a = c^3 - 4^{p+2}$ (p étant un nombre entier positif), ou $a = -c^3 - 4^{p+2}$, on a à considérer successivement plusieurs cas, au lieu de deux seulement, savoir

$$y = 2(2d + 1), \quad y = 2^2(2d + 1), \quad y = 2^3(2d + 1), \ldots,$$

mais la démonstration ne change pas; car, selon qu'on prend l'une ou l'autre de ces hypothèses, on peut toujours mettre le second membre, soit sous la forme

$$4^{2q+1}(t^2 + 4),$$

t étant impair, soit, si cette dernière condition n'est pas remplie, sous la forme $4^{2q}(r^2 + 1)$, r étant alors indis-

tinctement pair ou impair. Les deux carrés t^2 et 4 dans le premier cas, et les deux carrés r^2 et 1 dans le second cas sont premiers entre eux, tandis que le facteur impair du premier membre $(x^2 - cx + c^2)$ est toujours, comme dans le cas particulier de $a = c^3 - 16$ pour lequel la démonstration a été développée, indécomposable en une somme de deux carrés et par conséquent ne peut être un diviseur du second membre.

V. En troisième lieu,

$$a = + c^3 - 1 \quad \text{et} \quad c = 2b = 2(2d + 1).$$

On voit immédiatement que x ne peut être pair. Écrivons l'équation donnée ainsi

$$(x + 2b)(x^2 - 2bx + 4b^2) = y^2 + 1;$$

$x + 2b$, étant un diviseur impair de la somme $y^2 + 1$ de deux carrés premiers entre eux, est nécessairement de la forme $4n + 1$; donc x est de la forme $4k - 1$, en supposant d'abord que c est positif, et par conséquent le second facteur du premier membre est de la forme $4q - 1$, puisque b est impair. Ainsi ce facteur ne peut être diviseur de $y^2 + 1$. L'hypothèse est donc inadmissible, et l'impossibilité d'une solution est démontrée.

Lorsque c est supposé négatif, le raisonnement et les conclusions sont les mêmes.

VI. Il résulte de ce qui précède que l'équation $x^3 + a = y^2$, en se bornant à écrire ici les valeurs numériques les plus simples, est insoluble en nombres entiers pour les trois suites infinies de valeurs de a, savoir :

$a = \ldots -347, -129, -5, -3, +23, 339, 725, 1327, \ldots$

$a = \ldots -359, -141, -65, -43, -17,$
$+11, 61, 87, 109, 279, 327, 1315, \ldots$

$a = \ldots -2745, -1001, -217, -9, +7, 215, 999, 2743, \ldots$

L'impossibilité de l'équation $x^3 + a = y^2$ pour les valeurs particulières $a = 7$ et -17 a été démontrée dans les *Nouvelles Annales* de 1869 et de 1877, celle-ci notamment par M. Gerono. L'impossibilité pour les cas de $a = -3, -5, -9$, qui se retrouvent dans les suites ci-dessus, a été démontrée, d'une façon très-différente, par le P. Pepin dans le Mémoire précité.

Il y a d'autres cas où l'impossibilité d'une solution peut être prouvée *a priori*. Les équations

$$x^3 + 4 = y^2, \quad x^3 + 6 = y^2, \quad x^3 + 14 = y^2, \quad x^3 + 16 = y^2$$

sont de ce nombre, les solutions

$$x = 0, \quad y = 2 \quad \text{et} \quad x = 0, \quad y = 4$$

étant exclues comme de raison ; mais, pour abréger, je me bornerai à donner la démonstration pour l'équation

$$x^3 + 6 = y^2.$$

On voit d'abord que x et y ne peuvent être pairs, ensuite que x, impair, est nécessairement de la forme $8n + 3$. Cela posé, ajoutons 2 aux deux membres de l'équation ; puis, décomposant son premier membre en facteurs, mettons-la sous la forme

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = y^2 + 2 \times 1^2.$$

$x + 2$ est de la forme $8n + 5$; donc il ne peut être diviseur du second membre, car les expressions telles que $y^2 + 2u^2$, y et u étant premiers entre eux, n'admettent pas d'autres diviseurs linéaires impairs que ceux de l'une des formes $8n + 1$ ou $8n + 3$. Donc, etc. L'impossibilité des trois autres équations résulte de considérations analogues ; le lecteur en trouvera aisément la démonstration.

SCOLIES POUR UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR M. S. RÉALIS.

THÉORÈME. — *Tout nombre entier est la somme de trois nombres triangulaires.* (FERMAT.)

Scolies. — I. Tout nombre entier est la somme de quatre nombres triangulaires dont deux sont égaux.

II. Tout nombre entier est la somme de quatre nombres triangulaires dont deux sont consécutifs.

Note. — Il est bien entendu que, dans ces énoncés, zéro compte, au besoin, comme un nombre triangulaire dont un des facteurs est nul.

Les deux propositions, ou scolies, qui précèdent, sont des cas particuliers d'une proposition plus générale relative à la décomposition des nombres entiers en quatre nombres triangulaires.

NOTE

SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS POSITIFS DU SYSTÈME DES TROIS ÉQUATIONS

$$x = u^2, \quad x + 1 = 2v^2, \quad 2x + 1 = 3w^2$$

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 430);

Ces équations ont déjà été résolues par M. *E. Lucas*; elles n'ont qu'une seule solution entière positive : $x = u = v = w = 1$; c'est ce qui résulte aussi de ce

remarquable théorème démontré par M. de Jonquières, que :

Le nombre 5 *est le seul nombre entier qui jouisse de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres consécutifs, et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres consécutifs* (2e série, t. XVII, p. 308).

L'élimination de l'inconnue x, entre les trois équations proposées, donne

(1) $$u^2 + 1 = 2v^2$$

et

(2) $$2u^2 + 1 = 3w^2.$$

Le nombre u étant nécessairement impair, l'équation (1) revient à

(3) $$v^2 = n^2 + (n+1)^2.$$

Ainsi, v est un nombre dont le carré est égal à la somme des carrés de deux nombres consécutifs.

Remarquons, de plus, que v est premier avec 5, car autrement le chiffre des unités simples du u^2 serait 9, et par suite le chiffre des unités simples de w^2 serait 3, ce qui ne peut convenir à un carré.

Cela posé, des équations (1) et (2) on tire

$$4v^2 - 1 = 3w^2, \quad (2v+1)(2v-1) = 3w^2,$$

et, comme les nombres impairs $2v+1$, $2v-1$ sont premiers entre eux, il faut qu'on ait des relations de la forme

$$2v + 1 = 3\alpha^2, \quad 2v - 1 = \beta^2, \quad \alpha\beta = w,$$

ou

$$2v + 1 = \alpha^2, \quad 2v - 1 = 3\beta^2, \quad \alpha\beta = w.$$

Mais les égalités $2\nu + 1 = \alpha^2$, $2\nu - 1 = 3\beta^2$ sont inadmissibles, car il en résulterait $\alpha^2 - 3\beta^2 = 2$, ou, parce que α et β sont impairs,

$$(8M + 1) - 3(8N + 1) = 2;$$

$8p = 4$, ce qui est absurde.

Donc

$$2\nu - 1 = \beta^2 = (2m + 1)^2,$$

d'où

$$(4) \qquad \nu = m^2 + (m + 1)^2,$$

c'est-à-dire que ν est aussi la somme des carrés de deux nombres consécutifs. Mais ν est premier avec 5; par conséquent, d'après le théorème précité, les équations simultanées (3) et (4) ne peuvent être vérifiées que par $m = 0$, $n = 0$, $\nu = 1$; il s'ensuit

$$x = 1, \quad u = 1, \quad w = 1.$$

(G.)

QUESTIONS.

1279. Le carré de tout nombre impair divisible par 3 est la différence de deux nombres triangulaires premiers avec 3. (S. Realis.)

1280. L'équation $x^3 - (a^2 - b + c)x + ab = 0$, dans laquelle b est un entier plus grand que zéro, c un entier différent de zéro, et a un entier dont la valeur absolue est plus grande que celle de $\frac{c}{2}$, ne peut pas avoir deux racines entières.

Si l'équation a des racines imaginaires, la racine réelle est incommensurable. (S. Realis.)

1281. L'équation

$$(2+\sqrt{3})^{2x+1}+(2-\sqrt{3})^{2x+1}=\frac{2}{\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{2y+1}-(1-\sqrt{2})^{2y+1}\right]$$

n'admet pas d'autre solution, en nombres entiers, que celle qui correspond aux valeurs $x=y=0$.

(De Jonquières.)

1282. Si, d'un point B d'une hyperbole équilatère dont le centre est O, on abaisse une perpendiculaire BC sur une tangente en A, l'angle de COA est double de CAB.

(A. Cambier.)

1283. D'un point P pris sur la tangente en C à un cercle, on mène une sécante PAB telle que la surface du triangle ABC soit maximum; trouver l'enveloppe de cette sécante quand le point P se meut sur la tangente.

(Fauquembergue.)

1284. On décrit tous les cercles simplement tangents à une conique B, en un point fixe C. On mène à chacun de ces cercles des tangentes parallèles à deux diamètres fixes de la conique; trouver le lieu géométrique des points M d'intersection de ces tangentes.

(Barbarin.)

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

SUR LES PÉRIODES ÉLÉMENTAIRES.

Soit $f(z)$ une fonction doublement périodique. Considérons les points M_{00} et M_{10} qui représentent les imaginaires z_0 et $z_0 + \omega$, ω désignant une période de $f(z)$. On peut toujours supposer que ω soit la plus petite période d'argument égal à l'argument de ω; car il n'existe pas deux périodes distinctes de même argument; toutes sont multiples de l'une d'elles, que l'on peut appeler ω. Soit ϖ une période distincte de ω, et supposons-la aussi la plus petite de celles qui possèdent son argument. Soit M_{01} le point qui représente l'imaginaire $z_0 + \varpi$; sur les droites $M_{00}M_{10}$ et $M_{00}M_{01}$, on peut construire un parallélogramme que l'on pourra considérer comme un parallélogramme des périodes; on lui donne le nom de parallélogramme *élémentaire*, si aucun des points de son aire joints à M_{00} ne fournit une nouvelle période.

Il est clair que le parallélogramme élémentaire peut se former en prenant la période ω pour base et en faisant mouvoir le côté $M_{00}M_{10}$, pris pour base, parallèlement à lui-même, jusqu'à ce qu'il rencontre un point M_{01}, tel que $M_{00}M_{01}$ soit une période.

Soient ω et ϖ deux périodes élémentaires; ω' et ϖ' deux

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 247.

nouvelles périodes; il faudra nécessairement que l'on ait

$$(1) \qquad \begin{cases} \omega' = m\omega + n\varpi, \\ \varpi' = m'\omega + n'\varpi, \end{cases}$$

m et n, m' et n' désignant des entiers; car une période quelconque s'obtiendra en joignant le point M_{00} à l'un des points de croisement M_{mn} des droites formant le réseau des parallélogrammes des périodes ω, ϖ. Pour que les périodes ω', ϖ' puissent former un nouveau parallélogramme élémentaire, il faut que m et n soient premiers entre eux, ainsi que m' et n'. En effet, si m et n avaient le diviseur commun δ, en posant $m = \delta m''$, $n = \delta n''$, on aurait

$$\omega' = \delta(m''\omega + n''\varpi),$$

et $\frac{\omega'}{\delta}$ serait une période; ω' ne saurait donc être une période élémentaire; mait ω et ϖ doivent s'exprimer en ω' et ϖ' sous les formes

$$\omega = \mu\omega' + \nu\varpi',$$
$$\varpi = \mu'\omega' + \nu'\varpi',$$

ce qui exige que le déterminant du système (1) divise $n\varpi' - n'\omega'$ et $m\varpi' - m'\omega'$, c'est-à-dire n, n', m et m'. Or, m et n étant premiers entre eux, le déterminant est égal à l'unité, et l'on a

$$mn' - nm' = \pm 1.$$

Soit

$$\omega = a + b\sqrt{-1},$$
$$\varpi = a' + b'\sqrt{-1},$$
$$\omega' = ma + na' + \sqrt{-1}(mb + nb'),$$
$$\varpi' = m'a + n'a' + \sqrt{-1}(m'b + n'b'),$$

l'aire du second parallélogramme des périodes est

$$(ma + na')(m'b' + n'b') - (m'a + n'a')(ma + nb')$$

ou

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'.$$

Donc :

Les aires des parallélogrammes élémentaires sont égales.

SUR LA FORME GÉNÉRALE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES, ET LEUR EXPRESSION EN FONCTION DE L'UNE D'ELLES.

THÉORÈME I. — *Il existe toujours une fonction doublement périodique admettant deux périodes données, deux zéros donnés et deux infinis donnés, pourvu que la somme des zéros soit égale à la somme des infinis à des multiples des périodes près.*

En effet, nous avons vu qu'il existait deux fonctions distinctes φ_1 et φ_2 satisfaisant aux formules

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x),$$
$$\varphi(x+\varpi) = \varphi(x) e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\omega} 2(x+c)},$$

et que la solution la plus générale de ces équations était

$$A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2 = \varphi.$$

Ces fonctions φ_1 et φ_2 ont chacune deux zéros dans le parallélogramme des périodes ω et ϖ, ainsi que la fonction φ. Si nous divisons φ_1 par φ_2 ou si nous divisons $A_1 \varphi_1 + A_2 \varphi_2$ par $B_1 \varphi_1 + B_2 \varphi_2$, B_1 et B_2 désignant des constantes différentes de A_1 et A_2, nous obtiendrons une fonction doublement périodiqué $f(x)$. Soient a, b ses zéros, α et β ses infinis; considérons l'expression

(1) $$A \frac{f(x+s) - f(a'+s)}{f(x+s) - f(\alpha'+s)};$$

elle n'est plus infinie pour $x = \alpha$ ou $x = \beta$, mais elle l'est quand on pose $x = \alpha'$; elle admet en outre le zéro a'. Mais la fonction $f(x+s) - f(\alpha'+s)$, outre le zéro $x = \alpha'$, en possède un autre β', tout en conservant les infinis $x = \alpha - s$, $x = \beta - s$. On doit donc avoir, en observant que la somme des zéros est égale à celle des infinis,

$$\alpha' + \beta' \equiv \alpha - s + \beta - s \quad (*),$$

équation dans laquelle on peut choisir s, de telle sorte que β' ait une valeur donnée. L'expression (1) admettra alors deux infinis donnés α', β', le zéro donné a' et par suite un autre zéro b', tel que $\alpha' + \beta' \equiv a' + b'$; enfin le coefficient A permettra de prendre la fonction (1) égale à une quantité donnée différente de zéro pour une valeur donnée de x.

Théorème II. — *Il existe une fonction possédant les périodes ω et ϖ, les zéros a_1, a_2, ..., a_n et les infinis α_1, α_2, ..., α_n satisfaisant à la relation*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n.$$

En effet, soit $F_1(x)$ une fonction aux périodes ω, ϖ, admettant les zéros a_1 et b_1 et les infinis α_1 et α_2, b_1 étant déterminé par la formule

$$a_1 + b_1 \equiv \alpha_1 + \alpha_2.$$

Soit $F_2(x)$ une fonction aux mêmes périodes ayant pour zéros a_2 et b_2 et pour infinis α_3 et b_1, ... Soit $F_{n-1}(x)$ une fonction aux mêmes périodes admettant les zéros a_{n-1} et b_{n-1} et les infinis b_{n-2} et α_n, tels que

$$a_{n-1} + b_{n-1} \equiv \alpha_n + b_{n-2}.$$

(*) Le signe $\equiv$ est employé à la place de $=$ pour indiquer que l'on néglige des multiples des périodes.

La fonction

$$F_1(x)\,F_2(x)\ldots F_{n-1}(x)$$

aura les périodes ω, ϖ, les zéros $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}$ et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; mais on aura

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + b_{n-1} \equiv \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n-1} + \alpha_n.$$

Théorème III. — *Deux fonctions doublement périodiques d'ordre fini dont les périodes ω et ϖ, ω' et ϖ' satisfont aux relations*

$$\Omega = m\omega = m'\omega',$$
$$\Pi = n\varpi = n'\varpi',$$

m et m' désignant des nombres entiers; en d'autres termes, deux fonctions u, v, dont les parallélogrammes élémentaires ont leurs côtés commensurables et dirigés dans le même sens, sont fonctions algébriques l'une de l'autre.

En effet, soient μ l'ordre de u, et ν l'ordre de v. Le parallélogramme de u, comme celui de v, tiendra un nombre exact de fois dans le parallélogramme ayant pour côtés Ω et Π, le premier $mn = M$ fois, le second $m'n' = N$ fois. Il en résulte que, à chaque valeur de u, correspondront, dans le parallélogramme Ω, Π, un nombre $M\mu$ de valeurs de la variable z, et par suite $M\mu$ valeurs de v; donc v est lié à u par une équation algébrique de degré $M\mu$ en v. On verrait de même qu'elle est de degré $N\nu$ en u; car u et v n'ont que des nombres limités de zéros et d'infinis et restent d'ailleurs monogènes et continues l'une par rapport à l'autre.

Théorème IV. — *Une fonction d'ordre n est liée à sa dérivée par une équation du degré n, par rapport à sa dérivée, et de degré $2n$ par rapport à la fonction.*

En effet, soit u une fonction aux périodes ω et ϖ; sa dérivée admet les mêmes périodes, mais les infinis de la dérivée sont en général en nombre double de celui de la fonction; car chaque infini de la fonction, lorsqu'il est simple, devient double dans la dérivée; en tout cas, l'ordre de la dérivée sera compris entre $n+1$ et $2n$. En vertu du théorème précédent, il existera entre u et u' une relation algébrique d'ordre n en u' et d'ordre n' en u, $n+1 \leq n' \leq 2n$, u' n'étant infini que si u est infini; le coefficient de u'^n pourra être pris égal à l'unité. A une même valeur de u correspondent n valeurs de z dont la somme est constante, et par suite n valeurs de $\frac{dz}{du} = \frac{1}{u'}$, dont la somme est nulle; donc le coefficient de u' est nul.

Par exemple, si u est du second ordre et a deux infinis distincts, on aura

$$u'^2 + U = 0,$$

U désignant un polynôme du quatrième degré. Si u a un infini double, U sera seulement du troisième degré. Ce dernier théorème est de M. Méray.

DÉCOMPOSITION DES FONCTIONS A DEUX PÉRIODES EN ÉLÉMENTS SIMPLES.

Soient $F(x)$ une fonction aux périodes ω et ϖ et α_1, α_2, α_3, ... ses infinis. Soit $\theta(x)$ une fonction auxiliaire satisfaisant aux relations

$$\theta(x+\omega) = \theta(x),$$

$$\theta(x+\varpi) = \theta(x)\, e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)};$$

on aura

$$\frac{\theta'(x+\omega)}{\theta(x+\omega)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

$$\frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} = \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int F(z)\,\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}\,dz,$$

prise le long d'un parallélogramme des périodes. Le long des côtés parallèles à ϖ, les valeurs de l'intégrale se détruiront, et il restera à intégrer le long des deux autres côtés, ce qui donnera, en appelant p une arbitraire,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_p^{p+\omega} F(z)\,\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\,\mu\,dz,$$

résultat indépendant de μ et de p, que nous désignerons par C. Or, l'intégrale considérée est aussi égale à la somme des résidus de $F(z)\,\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}$. Les résidus relatifs à $\theta(z-x)$ sont, en appelant $a_1, a_2, a_3, \ldots$ les zéros de $\theta(z)$,

$$F(x+a_1),\quad F(x+a_2),\quad \ldots,\quad F(x+a_\mu);$$

ceux relatifs à $F(z)$ sont

$$A_1\,\frac{\theta'(\alpha_1-x)}{\theta(\alpha_1-x)},\quad A_2\,\frac{\theta'(\alpha_2-x)}{\theta(\alpha_2-x)},\quad \ldots,$$

si les infinis α sont simples, et l'on a

$$A_i = \lim(x-\alpha)\,F(x)\quad \text{pour}\quad x=\alpha.$$

En général, si l'on pose

$$(z-\alpha)^m F(z) = \varphi(z),$$

on aura, pour résidu de $F(z)\,\frac{\theta'(z-x)}{\theta(z-x)}$,

$$\frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}}\,\frac{1}{(m-1)!}\left[\varphi(\alpha)\,\frac{\theta'(\alpha-x)}{\theta(\alpha-x)}\right].$$

En résumé, on aura

$$C = \Sigma F(x+a) + \sum \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\theta'(\alpha - x)}{\theta(\alpha - x)} \varphi(\alpha) \right].$$

Supposons $\mu = 1$ et $a = 0$; on aura, au lieu de cette formule,

$$C = F(x) + \sum \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\theta'(\alpha - x)}{\theta(\alpha - x)} \varphi(\alpha) \right],$$

et $F(x)$ se trouve décomposé ainsi :

$$F(x) = C - \sum \frac{d^{m-1}}{d\alpha^{m-1}} \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{\theta'(\alpha - x)}{\theta(\alpha - x)} \varphi(\alpha) \right].$$

Cette formule donne $F(x)$ décomposée en éléments simples, tous intégrables au moyen de la fonction θ, ce qui démontre la possibilité d'intégrer les fonctions à deux périodes (du moins à l'aide des fonctions auxiliaires); mais le mode de décomposition dont il vient d'être question présente encore une foule d'autres applications que M. Hermite, auquel nous devons la théorie que nous venons d'exposer, a fait connaître.

Nous allons montrer immédiatement comment les intégrales de deuxième et de troisième espèce se ramènent par les considérations précédentes aux fonctions Θ et H de Jacobi.

La fonction de seconde espèce

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

quand on y fait $z = \operatorname{sn} x$, devient, à un facteur constant k^2 près,

$$\int k^2 \operatorname{sn}^2 x\,dx.$$

C'est cette intégrale que nous allons étudier. L'intégrale de troisième espèce

$$\int \frac{dz}{(1-n^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

devient, pour $z = \operatorname{sn} x$,

$$(a) \qquad \int \frac{dx}{1 - n^2 \operatorname{sn}^2 x};$$

nous la remplacerons par

$$\int \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x},$$

en posant $n^2 = k^2 \operatorname{sn}^2 a$ et en observant que l'intégrale (a) ne diffère de celle-ci que par une fonction linéaire de x et par un facteur constant.

ÉTUDE DE LA FONCTION $Z(x)$.

La fonction

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx$$

est évidemment monodrome, car les résidus de $\operatorname{sn}^2 x$ sont nuls; nous allons le vérifier.

Décomposons, par la méthode de M. Hermite, $\operatorname{sn}^2 x$ en éléments simples, cette fonction ayant pour périodes $2K$ [puisque $\operatorname{sn}(x + 2K) = -\operatorname{sn} x$] et $2K'\sqrt{-1}$. Évaluons l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \operatorname{sn}^2 z \, \frac{H'(z-x)}{H(z-x)} \, dz$$

le long d'un parallélogramme de côtés $2K$ et $2K'\sqrt{-1}$; le long des côtés verticaux, le résultat de l'intégration est nul; le long des côtés horizontaux, le résultat est

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\alpha^{\alpha + 2K} \operatorname{sn}^2 z$$
$$\times \left[\frac{H'(z-x)}{H(z-x)} - \frac{H'(z - x + 2K'\sqrt{-1})}{H(z - x + 2K'\sqrt{-1})} \right] dz.$$

En vertu de la formule

$$\mathrm{H}(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = -\,\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})},$$

l'intégrale considérée se réduit à

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+2\mathrm{K}} \mathrm{sn}^2 z\,\frac{1}{\mathrm{K}}\,dz = \frac{1}{2\mathrm{K}}\int_0^{2\mathrm{K}} \mathrm{sn}^2 z\,dz;$$

nous désignerons cette quantité par C. Mais l'intégrale (1) est aussi égale à la somme des résidus de la fonction placée sous le signe $\int$; le résidu relatif au point x est $\mathrm{sn}^2 x$; calculons celui qui est relatif au point $\mathrm{K}'\sqrt{-1}$. Posons pour cela $z = \mathrm{K}'\sqrt{-1}+h$; nous aurons

$$\begin{aligned}&\mathrm{sn}^2(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+h)\,\frac{\mathrm{H}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-x+h)}{\mathrm{H}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-x+h)}\\ &\quad= \frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2 h}\left\{\frac{\mathrm{H}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-x)}{\mathrm{H}(\mathrm{K}\sqrt{-1}-x)} + h\left[\frac{\mathrm{H}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-x)}{\mathrm{H}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-x)}\right]'\right\},\end{aligned}$$

et par suite le coefficient de $\frac{1}{h}$ ou le résidu cherché est

$$\frac{1}{k^2}\left[\frac{\mathrm{H}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}-x)}{\mathrm{H}(\mathrm{K}\sqrt{-1}-x)}\right]'.$$

Si l'on observe que

$$\mathrm{H}(-x+\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\Theta(-x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4\mathrm{K}}(-2x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})},$$

on a

$$-\frac{\mathrm{H}'(\mathrm{K}\sqrt{-1}-x)}{\mathrm{H}(\mathrm{K}\sqrt{-1}-x)} = -\frac{\Theta'(-x)}{\Theta(-x)} + \frac{\pi\sqrt{-1}}{2\mathrm{K}}.$$

Notre résidu devient

$$-\frac{1}{k^2}\left[\frac{\Theta'(-x)}{\Theta(-x)}\right]' = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]'.$$

On a donc enfin

$$C = \operatorname{sn}^2 x + \frac{1}{k^2}\left[\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}\right]',$$

ou, en intégrant, en multipliant par k^2 et en posant $Ck^2 = \zeta$,

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)};$$

telle est l'expression de $Z(x)$, monodrome comme l'on voit. On en déduit

$$(2) \qquad \int_0^x Z(x)\,dx = \zeta\frac{x^2}{2} - \log\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)},$$

et l'on constate que la fonction

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}$$

est monodrome également. M. Weierstrass la désigne par le symbole $\mathrm{Al}\,x$. Il désigne par $\mathrm{Al}_1 x$, $\mathrm{Al}_2 x$, $\mathrm{Al}_3 x$ les produits de $\mathrm{Al}\,x$ par $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$.

La constante ζ est susceptible de prendre une forme remarquable. En effet, en différentiant (1), on a

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

et, en différentiant encore,

$$\operatorname{sn}^2 x = \zeta - \frac{\Theta''(x)\Theta(x) - \Theta'^2(x)}{\Theta^2(x)}.$$

Si l'on fait alors $x = 0$, on a

$$0 = \zeta - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)},$$

ou enfin

$$\zeta = \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)}.$$

On a ainsi plusieurs expressions de la constante ζ, que l'on peut considérer comme parfaitement connue.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE ELLIPTIQUE DE TROISIÈME ESPÈCE.

On peut parfois éviter la méthode de décomposition donnée plus haut. En voici un exemple :

La formule [14] donne

$$\Theta(x+a)\Theta(x-a) = \frac{\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}\Theta^2(x) - \frac{H^2(a)}{\Theta^2(0)}H^2(x);$$

on peut l'écrire

$$\Theta(x+a)\Theta(x-a) = \frac{\Theta^2(x)\Theta^2(a)}{\Theta^2(0)}(1 - k^2\operatorname{sn}^2 x \operatorname{sn}^2 a).$$

On en déduit immédiatement

$$1 - k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x = \frac{\Theta^2(0)\,\Theta(x+a)\,\Theta(x-a)}{\Theta^2(x)\,\Theta^2(a)}.$$

En prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à a, on trouve (en observant que $\operatorname{sn}' a = \operatorname{dn} a \operatorname{cn} a$),

$$\frac{-2k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x} = \frac{\Theta'(x+a)}{\Theta(x+a)} - \frac{\Theta'(x-a)}{\Theta(x-a)} - 2\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}.$$

Si l'on change les signes et que l'on intègre de zéro à x, on trouve

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}\,dx = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Cette intégrale n'est pas tout à fait l'intégrale de troisième espèce de Legendre, mais il est clair qu'elle s'y ramène aisément. Jacobi la désigne par $\Pi(x, a)$. Ainsi l'on a

$$(1) \qquad \Pi(x, a) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

On en conclut, en changeant x en a et a en x, puis en retranchant,

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} - a\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

On peut d'ailleurs s'assurer que les valeurs des logarithmes se sont détruites, en observant que l'on doit avoir une identité pour $x = 0$, $a = 0$.

C'est dans l'égalité précédente que consiste *l'échange du paramètre et de l'argument*, proposition généralisée dans la théorie des fonctions abéliennes. On peut aussi l'écrire

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = x\mathrm{Z}(a) - a\mathrm{Z}(x).$$

EXPRESSION D'UNE FONCTION DOUBLEMENT PÉRIODIQUE AU MOYEN D'UNE FONCTION DU SECOND ORDRE AUX MÊMES PÉRIODES. — THÉORÈME DE M. LIOUVILLE.

Soit $f(x)$ une fonction monodrome et monogène du second ordre aux périodes ω et ϖ; soient α et $s - \alpha$ ses infinis, s désignant la quantité constante à laquelle se réduit la somme des valeurs de z pour lesquelles $f(z)$ prend une valeur donnée dans un même parallélogramme. Soit $\mathrm{F}(z)$ une fonction quelconque aux mêmes périodes ω, ϖ; soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ ses infinis. La fonction $\frac{\mathrm{F}(z)}{f(z) - f(x)}$ intégrée le long d'un parallélogramme des périodes donne un résultat nul : la somme de ses résidus est donc nulle.

La somme des résidus relatifs aux infinis x et $s - x$ de $\frac{1}{f(z) - f(x)}$ est

$$\mathrm{F}(x)\frac{1}{f'(x)} + \mathrm{F}(s - x)\frac{1}{f'(s - x)},$$

ou bien

$$\frac{F(x) - F(s-x)}{f'(x)},$$

en observant que, $f(x)$ étant égal à $f(s-x)$, $f'(x)$ doit être égal et de signe contraire à $f'(s-x)$. La somme des résidus relatifs à $F(x)$ étant alors représentée par

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_F \frac{F(z)\,dz}{f(z)-f(x)},$$

on aura

$$(1)\quad F(x) - F(s-x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} f'(x) \int_F \frac{F(z)\,dz}{f(x)-f(z)},$$

le signe F placé au-dessous du signe $\int$ indiquant qu'on ne doit intégrer qu'autour des infinis de $F(z)$.

Si l'on considère en second lieu la fonction

$$\frac{F(z)f'(z)}{f(z)-f(x)},$$

son intégrale prise le long d'un parallélogramme sera encore nulle, et il en sera de même de la somme de ses résidus. Or la somme des résidus relatifs à $\dfrac{f'(z)}{f(z)-f(x)}$ est égale à

$$F(x) + F(s-x) - F(\alpha) - F(s-\alpha),$$

et l'on a par suite

$$F(x) + F(s-x) - F(\alpha) - F(s-\alpha) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_F \frac{F(z)f'(z)}{f(z)-f(x)}\,dz = 0,$$

ou bien

$$F(x) + F(s-x) = F(\alpha) + F(s-\alpha) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_F \frac{F(z)f'(z)}{f(x)-f(z)}\,dz.$$

La comparaison de cette formule avec (1) donne

$$2F(x) = F(\alpha) + F(s-\alpha) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_F \frac{F(z)[f'(x)+f'(z)]}{f(z)-f(x)}\,dz,$$

ou bien encore

$$(2)\quad \begin{cases} 2F(x) = F(\alpha) + F(s-\alpha) \\ \qquad + \dfrac{1}{(\mu-1)!}\sum \dfrac{d^{\mu-1}}{d\beta^{\mu-1}}\left[\theta(\beta)\dfrac{f'(x)+f'(\beta)}{f(x)-f(\beta)}\right], \end{cases}$$

en posant $F(z) = (z-\beta)^{\mu}\theta(z)$, μ désignant le degré de multiplicité de l'infini β. Quand $\mu = 1$, le symbole $\dfrac{1}{(\mu-1)!}\sum \dfrac{d^{\mu-1}}{d\beta^{\mu-1}}$ doit être supprimé.

La formule (2) montre que *toute fonction aux périodes* ω, ϖ *peut s'exprimer rationnellement au moyen de la fonction du second ordre* f *et de sa dérivée.*

On voit, en outre, que cette dérivée n'entrera que sous forme linéaire.

Ce théorème est dû à M. Liouville, mais l'expression (2) explicite de F, que nous venons de donner, n'est, je crois, pas encore connue ; du moins on ne la trouve pas dans le Traité de MM. Briot et Bouquet.

Remarque. — La théorie précédente tomberait en défaut si $F(x)$ et $f(x)$ avaient des infinis communs, mais on tournerait facilement la difficulté en développant $F(x)$ divisé par une puissance convenablement choisie de $f(x)$.

APPLICATION DES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES AU PROBLÈME DIT DE LA MULTIPLICATION.

Le problème de la multiplication des fonctions elliptiques a pour but de faire connaître $\operatorname{sn} mx$, $\operatorname{cn} mx$,

$\operatorname{dn} mx$ en fonction de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Notre formule (2) du paragraphe précédent résout cette question plus simplement et plus complétement qu'on ne l'avait fait jusqu'ici.

Soient k le module de $\operatorname{sn} x$, $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ ses périodes, m un nombre entier : $\operatorname{sn} m(x-a)$ admet évidemment les mêmes périodes. Construisons le parallélogramme des périodes, de telle sorte que ses côtés coïncident avec l'axe des x et l'axe des y positifs, puis déplaçons infiniment peu ce parallélogramme, en plaçant le sommet primitivement à l'origine, dans l'angle des coordonnées négatives.

Les infinis de $\operatorname{sn} x$ sont $K'\sqrt{-1}$ et $2K + K'\sqrt{-1}$, ceux de $\operatorname{sn} m(x-a)$ sont

$$\beta' = a + (2i+1)\frac{K'\sqrt{-1}}{m} + (2j+1)\frac{K}{m},$$

$$\beta'' = a + (2i+1)\frac{K'\sqrt{-1}}{m} + 2j\frac{2K}{m},$$

i et j variant de zéro à $m-1$. En faisant $s = 2K$, la formule (2) du paragraphe précédent donne

$$(1)\quad \begin{cases} 2\operatorname{sn} m(x-a) = \operatorname{sn} m(K'\sqrt{-1} - a) \\ \qquad\qquad + \operatorname{sn} m(K'\sqrt{-1} + 2K - a) \\ \qquad\qquad + \Sigma \text{ résidu}.\operatorname{sn} m(z-a)\dfrac{\operatorname{sn}' x + \operatorname{sn}' z}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn} z}. \end{cases}$$

Le résidu relatif à un infini β' s'obtiendra en cherchant la limite de

$$z \operatorname{sn} m(\beta' - a + z)\frac{\operatorname{sn}' x + \operatorname{sn}'\beta'}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}\beta'}$$
$$= z\operatorname{sn}\left[(2i+1)K'\sqrt{-1} + (2j+1)2K + mz\right]\frac{\operatorname{sn}' x + \operatorname{sn}'\beta'}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}\beta'}$$
$$= z\,\frac{-1}{k\operatorname{sn} mz}\,\frac{\operatorname{sn}' x + \operatorname{sn}'\beta'}{\operatorname{sn} x - \operatorname{sn}\beta'}.$$

Cette limite est

$$-\frac{1}{km}\,\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'\beta'}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\beta'}.$$

L'infini β'' conduit au résidu

$$\frac{1}{km}\,\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'\beta''}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\beta''}.$$

La formule (1) devient ainsi

$$\begin{aligned}
2\operatorname{sn}m(x-a)
&=\sum\frac{1}{km}\,\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'\left[\dfrac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+4j\dfrac{\mathrm{K}}{m}+a\right]}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\left[\dfrac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+4j\dfrac{\mathrm{K}}{m}+a\right]}\\
&-\sum\frac{1}{km}\,\frac{\operatorname{sn}'x-\operatorname{sn}'\left[\dfrac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+(2j+1)\dfrac{2\mathrm{K}}{m}+a\right]}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}\left[\dfrac{2i+1}{m}\mathrm{K}'\sqrt{-1}+(2j+1)\dfrac{2\mathrm{K}}{m}+a\right]}.
\end{aligned}$$

En faisant $a=0$, on a la formule de la multiplication pour le sinus amplitude. On peut vérifier la formule précédente en prenant $m=1$, on a alors

$$\begin{aligned}
2k\operatorname{sn}(x-a)
&=\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+a)}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+a)}\;\frac{\operatorname{sn}'x+\operatorname{sn}'(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+2\mathrm{K}+a)}{\operatorname{sn}x-\operatorname{sn}(\mathrm{K}'\sqrt{-1}+2\mathrm{K}+a)};
\end{aligned}$$

et si l'on observe que $\operatorname{sn}'x=\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x$,

$$\operatorname{cn}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{dn}x}{k\operatorname{sn}x},$$

$$\operatorname{dn}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}\,\frac{\operatorname{cn}x}{\operatorname{dn}x},$$

$$\operatorname{sn}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})=\frac{1}{k\operatorname{sn}x},$$

on trouve

$$\operatorname{sn}(x-a)=\frac{\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}x-\operatorname{cn}x\operatorname{dn}x\operatorname{sn}a}{1-k^2\operatorname{sn}^2x\operatorname{sn}^2a}$$

Ainsi notre méthode donne aussi l'addition des fonctions elliptiques.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la multiplication. La division aurait pour but de calculer sn $\frac{x}{m}$, cn $\frac{x}{m}$, ... en fonction de sn$x$, cn$x$, dn$x$, ... Sans entrer dans des détails à ce sujet, disons seulement qu'Abel a démontré que les équations d'où dépend la division des fonctions elliptiques sont comme celles d'où dépend la division des fonctions circulaires, résolubles par radicaux.

APPLICATION A L'ADDITION DES FONCTIONS DE TROISIÈME ESPÈCE.

Nous avons trouvé

$$\Pi(x, a) = x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Si l'on désigne alors par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n+1}$ des arguments tels que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0,$$

on aura

$$\Pi(\alpha_1, a) + \Pi(\alpha_2, a) + \ldots + \Pi(\alpha_{2n+1}, a)$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\alpha_1 - a)\Theta(\alpha_2 - a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} - a)}{\Theta(\alpha_1 + a)\Theta(\alpha_2 + a)\ldots\Theta(\alpha_{2n+1} + a)}.$$

La quantité placée sous le signe log possède les périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ par rapport à la variable a; on pourra donc l'exprimer en vertu du théorème de M. Liouville en fonction rationnelle de sn$a$ et de sa dérivée sn$'a$ ou cn$a \times$ dn$a$. Nous ne donnons pas ici cette expression, qui est un peu compliquée.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

La formule de Fourier donne

$$\operatorname{sn} x = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}x}}{4K} \int_{x_0}^{x_0+4K} \operatorname{sn} z\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz;$$

reste à calculer la valeur de l'intégrale qui entre dans cette formule. D'abord, en posant

$$A_m = \int_{x_0}^{x_0+4K} \operatorname{sn} z\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz,$$

on trouve, au moyen de la formule $\operatorname{sn}(2K + x) = -\operatorname{sn} x$,

$$\begin{aligned} A_m &= \int_{x_0}^{x_0+2K} \operatorname{sn} z\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz \\ &+ \int_{x_0}^{x_0+2K} (-\operatorname{sn} z)\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}(z+2K)}\, dz \\ &= \int_{x_0}^{x_0+2K} \operatorname{sn} z[1-(-1)^m]\, e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}\, dz. \end{aligned}$$

L'intégrale A_m étant indépendante de x_0, on peut supposer x_0 un peu plus petit que zéro. L'intégrale étant prise le long du contour rectiligne x_0, $x_0 + 2K$ peut être remplacée par deux parallèles à $K'\sqrt{-1}$ de longueur infinie, menées l'une par x_0 et l'autre par $x_0 + 2K$ au-dessous de l'axe des x, et par une parallèle à l'axe des x, menée à l'infini. Le long de ce nouveau contour, l'intégrale sera nulle; mais il faudra lui ajouter les résidus relatifs aux points $-K'\sqrt{-1}$, $-3K'\sqrt{-1}$, $-5K'\sqrt{-1}$, ..., multipliés par $2\pi\sqrt{-1}$. De plus, ces résidus seront pris dans le sens rétrograde.

Calculons le résidu relatif à ce point

$$-(2n+1)K'\sqrt{-1};$$

il est égal à

$$\lim \frac{x+(2n+1)K'\sqrt{-1}}{k\operatorname{sn}(x+K'\sqrt{-1})} e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}[-(2n+1)K'\sqrt{-1}]};$$

mais, $\operatorname{sn}'x$ étant égal à 1 pour $x=0$ ou $2\pi K'\sqrt{-1}$, cette quantité peut s'écrire

$$\frac{1}{k} q^{\frac{2n+1}{2}m}.$$

On a donc

$$A_m = \frac{1}{4kK} \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{\frac{2n+1}{2}m} [1-(-1)^m] 2\pi\sqrt{-1},$$

et l'on a

$$A_{2m} = 0,$$

$$A_{2m+1} = \frac{1}{2kK} \sum q^{\frac{2n-1}{2}(2m+1)} 2\pi\sqrt{-1};$$

par conséquent

$$A_{2m+1} = \frac{1}{2kK} \frac{q^{\frac{2m+1}{2}}}{1-q^{2m+1}} 2\pi\sqrt{-1}.$$

Quand m est négatif, on a

$$\int_0^{4K} \operatorname{sn} z e^{\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z} dz = -\int_0^{4K} \operatorname{sn} z dz e^{-\frac{m\pi\sqrt{-1}}{2K}z}.$$

Les coefficients des termes également distants de l'origine sont donc égaux, et, en les groupant, on a

$$\operatorname{sn} x = \frac{\pi\sqrt{q}}{kK} \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{q^m}{1-q^{2m+1}} \sin\frac{(2m+1)\pi x}{4K},$$

$$\operatorname{cn} x = \frac{\pi\sqrt{q}}{kK} \sum_0^\infty \frac{q^m}{1-q^{2m+1}} \cos\frac{(2m+1)\pi x}{4K},$$

$$\operatorname{dn} x = \frac{\pi}{4K}\left(1+4\sum_1^\infty \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos\frac{m\pi x}{2K}\right).$$

A ces formules il convient de joindre les suivantes, auxquelles on parvient d'une façon toute semblable :

$$\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \frac{2\pi}{K}\sum_1^\infty \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin\frac{m\pi x}{K},$$

$$\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)} = \frac{2\pi}{K}\sum_1^\infty \frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}} \sin\frac{m\pi x}{K}.$$

$\frac{H'(x)}{H(x)}$ devenant infini pour $x = 0$, on développera

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{H(x)}{\sin\frac{\pi x}{2K}}\right];$$

on trouvera alors

$$\frac{H'(x)}{H(x)} = \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi x}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin\frac{m\pi x}{K},$$

$$\frac{H'_1(x)}{H_1(x)} = -\frac{\pi}{2K}\,\text{tang}\,\frac{\pi x}{2K} + \frac{2\pi}{K}\sum \frac{(-1)^m q^m}{1-q^{2m}} \sin\frac{m\pi x}{K}.$$

De ces dernières formules on tire

$$\frac{d\log \text{sn}\, x}{dx} = \frac{\text{cn}\, x\, \text{dn}\, x}{\text{sn}\, x} = \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi x}{2K} - \frac{2\pi}{K}\sum \frac{q^m}{1+q^m} \sin\frac{m\pi x}{K},$$

$$\frac{d\log \text{cn}\, x}{dx} = -\frac{\pi}{2K}\,\text{tang}\,\frac{\pi x}{2K} - \frac{2\pi}{K}\sum \frac{q^m}{1+(-1)^m q^m} \sin\frac{m\pi x}{K},$$

$$\frac{d\log \text{dn}\, x}{dx} = -\frac{4\pi}{K}\sum \frac{q^{2m-1}}{1-q^{2(2m-1)}} \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2K}.$$

On arrive plus simplement à ces résultats comme il suit.

Rappelons la formule

$$-\frac{1}{2}\log(1-2r\cos\varphi + r^2) = r\cos\varphi + \frac{r^2}{2}\cos 2\varphi + \frac{r^3}{3}\cos 3\varphi \ldots,$$

et partons de

$$\Theta(x) = c\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\ldots,$$

nous aurons

$$\frac{1}{2}\log\Theta(x) = \frac{1}{2}\log c - \cos\frac{\pi x}{K}\frac{q}{1-q^2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{K}\frac{q^2}{1-q^4} - \ldots,$$

et, en prenant les dérivées, nous aurons le développement de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$. On obtient d'une façon analogue ceux de $\frac{\Theta'_1(x)}{\Theta_1(x)}$, $\frac{H'(x)}{H(x)}$ et $\frac{H'_1(x)}{H(x)}$.

SUR LE PROBLÈME DE LA TRANSFORMATION.

Le problème de la transformation a pour but la comparaison des fonctions elliptiques correspondant à des modules différents. Exposons, d'abord, la théorie que Jacobi donne dans son ouvrage intitulé : *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum.*

Si dans l'expression

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}$$

on pose $x = \frac{U}{V}$, U et V désignant des polynômes entiers en y, on aura

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} \\ &\qquad = \frac{V\,dU - U\,dV}{\sqrt{AV^4 + BV^3U + CV^2U^2 + DVU^3 + EU^4}}, \end{aligned} \right.$$

et l'on peut, d'une infinité de manières, déterminer U et V, de telle sorte que le second membre de cette formule soit de la forme

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}}.$$

En effet, pour que dans le second membre de (4) le polynôme sous le radical se ramène au quatrième degré, il faut que ce polynôme, qui est d'un degré quadruple de celui de U et V, ne contienne que des facteurs doubles, à l'exception de quatre qui seront simples; on aura donc, en appelant T un polynôme entier,

$$AV^4 + BV^3U + \ldots + EU^4$$
$$= T^2(A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4);$$

le second membre de (1) se réduira alors à la forme demandée si l'on a

$$(2) \qquad \frac{V\,dU - U\,dV}{T\,dy} = \text{const.}$$

Or, il en est ainsi quand U et V, sont de même degré ou de degrés différents d'une unité. Soit en effet

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$$
$$= E(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta),$$

et par suite

$$AV^4 + BV^3U + CV^2U^2 + DVU^3 + EU^4$$
$$= E(U - \alpha V)(U - \beta V)(U - \gamma V)(U - \delta V).$$

Les facteurs $(U - \alpha V)$, $(U - \beta V)$, ... sont premiers entre eux, car tout diviseur simple de $U - \alpha V$ et de $U - \beta V$, par exemple, sera diviseur simple de U et V, et, comme on peut supposer U et V premiers entre eux, les facteurs $U - \alpha V$, ... le seront aussi. Or on a identiquement

$$-\alpha(V\,dU - U\,dV) = (U - \alpha V)\,dU - U\,d(U - \alpha V);$$

il en résulte que tout facteur double de $U - \alpha V$ est facteur de $V\,dU - U\,dV$, car ce facteur appartient à la dérivée $\frac{d}{dy}(U - \alpha V)$.

En résumé, le polynôme $AV^4 + BV^3U + \ldots$ jouit de cette propriété que ses facteurs doubles sont aussi facteurs doubles de $U - \alpha V$, de $U - \beta V$, de $U - \gamma V$ ou de $U - \delta V$, puisque ces polynômes ne peuvent avoir de facteur commun, et, par suite, ses facteurs doubles divisent $U dV - V dU$. Si donc on suppose tous les facteurs de $AV^4 + BV^3U + \ldots$ doubles, à l'exception de quatre d'entre eux, le polynôme T divisera

$$V dU - U dV.$$

Si alors on suppose que V et U soient de même degré p, ou l'un de degré p et l'autre de degré $p - 1$, $AV^4 + \ldots$ sera de degré $4p$, T^2 de degré $4p - 4$ et T de degré $2p - 2$;

$$U dV - V dU$$

est évidemment de même degré, et, par suite, la formule (2) est satisfaite.

On pourra donc effectuer la transformation d'une infinité de manières, car on pourra d'une infinité de manières déterminer les coefficients de U et V, de telle sorte que $AV^4 + BV^3U \ldots$ ait tous ses facteurs doubles à l'exception de quatre d'entre eux, U et V étant de degrés différents de zéro ou de 1.

Le *degré* de la transformation est le degré de celui des polynômes U, V qui possède le degré le plus élevé.

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SOLUTIONS ET REMARQUES,

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

On donne deux axes rectangulaires qui se coupent en o et une droite N qui rencontre ces axes en a et b.

On demande le lieu du pôle de N, par rapport aux coniques qui coupent cette droite à angle droit, et dont les axes sont dirigés suivant oa et ob (*).

D'un point quelconque m de N élevons une perpendiculaire à cette droite, appelons e le point où elle rencontre oa, et g le point où elle rencontre ob. Cherchons une construction du pôle de N, par rapport à la conique tangente en m à eg.

Du point o, abaissons une perpendiculaire sur N, appelons i le point où elle rencontre N, α le point où elle coupe la conique et j un point tel que $oi \times oj = \overline{o\alpha}^2$. La polaire du point i est la droite jl, menée parallèlement au diamètre om qui est conjugué de $o\alpha$. Le point l, où jl rencontre eg, est le pôle de N par rapport à la conique.

On a

$$ml = oj = \frac{\overline{o\alpha}^2}{oi} = \frac{mg \times me}{oi} = \frac{ma \times mb}{oi}.$$

Prenons le symétrique de o par rapport à N, et par ce point menons la droite R parallèlement à N. La droite R coupe eg en h, tel que $mh = oi$.

La relation précédente peut alors s'écrire

$$(1) \qquad ml \times mh = ma \times mb.$$

De là, nous voyons que *l'on obtient le point l en prenant le point d'intersection de eg et d'une circonférence qui contient les points a, b, h.*

Les points a, b et la droite R sont fixes ; on peut alors engendrer le lieu des points l de la manière suivante :

On donne deux points fixes a, b et une droite R

(*) L'énoncé de la question proposée n'était pas formulé ainsi. On est prié de faire la figure.

parallèle à la droite ab. D'un point quelconque m de ab, on élève à cette droite la perpendiculaire ml; cette perpendiculaire rencontre R au point h. Par les points a, b, h, on fait passer une circonférence; cette courbe coupe ml en l. On demande le lieu des points tels que l, lorsqu'on fait varier m sur ab.

Il résulte tout de suite de cette génération que les points o, a, b appartiennent au lieu et que ce lieu est symétrique par rapport à la perpendiculaire à ab élevée du point c milieu de ce segment. En prenant cet axe de symétrie comme axe des x, et N comme axe des y, la relation (1) s'écrit

$$\overline{mh}.x = y^2 - \overline{ac}^2.$$

Désignons mh par q et ac par K, cette équation s'écrit

$$y^2 = q\left(x + \frac{K^2}{q}\right).$$

Et en posant $x + \frac{K^2}{q} = x'$, on a

$$y^2 = qx',$$

équation d'une parabole, dont le sommet est à une distance du point c égale à $\frac{K^2}{q}$.

Ce sommet s'obtient du reste par la construction précédente, en cherchant le point du lieu qui est sur l'axe de la parabole : on décrit pour cela une circonférence qui contient a et b et qui est tangente à R : cette courbe coupe l'axe au sommet cherché.

Nous arriverons tout à l'heure à une autre construction du sommet de la parabole.

Il résulte de l'équation du lieu que la distance du sommet de la parabole au foyer de cette courbe est égale

au quart de oi. Nous allons arriver autrement à ce résultat.

Prenons en o' le symétrique de o, par rapport à l'axe de la parabole. Nous avons en o les sommets des angles droits de deux triangles rectangles inscrits dans la parabole. Les hypoténuses de ces triangles sont ab et la perpendiculaire abaissée de o' sur ab. Ces hypoténuses se coupent en n, et l'on sait, d'après un théorème de Frégier, que on est alors normale en o à la parabole. La droite oo' et cette normale interceptent, sur l'axe de la parabole, un segment qui est égal au paramètre de cette courbe, et, comme ce segment est la moitié de oi, on voit ainsi que la distance du sommet de la parabole au foyer de cette courbe est égale au quart de oi.

Le quadrilatère $ao'ob$ est inscrit dans la parabole, ses diagonales se coupent en u sur l'axe. Appelons t le point où l'axe de la parabole rencontre ob, la polaire du point t passe en u : donc le sommet de la parabole est le point z milieu du segment tu.

En rapprochant cette construction du sommet, de celle à laquelle nous étions d'abord arrivé, nous obtenons cette proposition de Géométrie élémentaire :

On a un triangle isoscèle atb. On mène les deux hauteurs tc, ao; ces droites se coupent en u. On prolonge tc jusqu'en s, de façon que cs soit égale à la distance du point o à la base ab. On joint le point a au point s et le point a au point z, milieu de tu : démontrer que l'angle zas est droit.

On peut se demander quels sont les arcs de la parabole qui correspondent à des ellipses, et les arcs qui correspondent à des hyperboles. On a tout de suite la réponse en remarquant que, pour les ellipses seulement, le pied de la normale est d'un même côté par rapport aux points où cette droite rencontre les axes. Lors donc que le

point m est en dehors de ab, on a des points, tels que l, provenant d'ellipses. C'est alors seulement sur l'axe boa de la parabole qu'on a des points provenant d'hyperboles.

Cherchons, en prenant un point quelconque m' situé sur ab entre a et b, quelles sont les asymptotes de l'hyperbole normale en m' à ab.

Le point m' est le milieu de la portion de la tangente en ce point à l'hyperbole qui est comprise entre les asymptotes cherchées, et comme ces droites doivent être également inclinées sur les axes, on les obtient par cette construction : On circonscrit une circonférence au triangle aob et l'on joint le point o aux points où cette circonférence est rencontrée par la perpendiculaire élevée en m' à la normale N : ces droites sont les asymptotes cherchées. On retrouve bien par cette construction que, si le point choisi sur ab est au milieu de ce segment, l'hyperbole correspondante est équilatère. Pour les points a et b, on a des coniques infiniment aplaties qui forment la transition entre les ellipses et les hyperboles.

On verra facilement que, pour obtenir les foyers d'une des coniques, il suffit de prendre les intersections, avec l'un des axes, de la circonférence qui a pour diamètre la portion de l'autre axe comprise entre N et la tangente à la conique que l'on considère. Pour obtenir les sommets de la conique passant en m, on opère ainsi : Du point a', milieu de oa, on décrit une circonférence avec om pour rayon ; cette courbe rencontre la droite ob aux sommets de la conique. De même pour l'autre axe, en employant le milieu b' de ob.

Puisque les segments ma et mb sont dans le rapport des carrés des axes de la conique, nous pouvons de cette construction déduire cette proposition élémentaire :

On a un triangle boa et les points a' et b' milieux des côtés oa, ob : on prend un point quelconque m sur

l'hypoténuse; on a

$$\frac{ma}{mb} = \frac{\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2}{\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}^2}.$$

On demande la démonstration directe de cette proposition ainsi que du théorème qui a donné la construction des axes et qu'on peut énoncer ainsi :

Un point d'une conique le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en ce point et les extrémités d'un des axes de la conique sont sur une même circonférence de cercle.

Nous sommes arrivé géométriquement à la relation (1) ; on peut, à partir du moment où cette relation est établie, continuer de la manière suivante.

Joignons le point a au point h, le point b au point l, et abaissons sur R la perpendiculaire av.

L'angle lba est égal à l'angle mha, et par suite est égal à l'angle vah.

Lorsque l'on considère différentes positions de ml, on a des droites telles que ah et bl qui forment deux faisceaux homographiques.

Les droites hl qui passent par les points où R est rencontrée par les droites telles que ah forment aussi un faisceau (dont le sommet est à l'infini) qui est homographique au faisceau formé par les droites bl. Les rayons homologues de ces faisceaux se rencontrent en des points, tels que l, qui appartiennent à une parabole. Cette courbe passe par le sommet b du faisceau des droites bl. De même, elle passe par a qu'on aurait pu prendre comme sommet d'un faisceau de droites. L'axe est perpendiculaire à ab, etc.

Nous avons rejeté à la fin de cette Note, et nous avons indiqué rapidement cette solution géométrique, parce qu'elle nécessite des connaissances qui sont en dehors du cours de Mathématiques spéciales.

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1876;

PAR M. GAMBEY.

On donne une parabole P *et un point* H *dont la projection orthogonale sur le plan de la courbe se fait au sommet de cette parabole :*

1° *Trouver l'équation générale des surfaces de révolution du second ordre qui passent par la parabole* P *et par le point* H;

2° *Déterminer le nombre de celles de ces surfaces dont l'axe passe par un point* A *donné dans le plan* Q, *qui contient le point* H *et l'axe de la parabole* P.

Classer les mêmes surfaces quand le point A *se meut dans le plan* Q.

Prenons pour origine des coordonnées le sommet de la parabole, pour axe des z la projetante du point H, et pour plan des xy le plan de la parabole, dans lequel elle sera rapportée à son axe et à la tangente au sommet; de sorte que ses équations seront

$$z = 0, \quad y^2 - 2px = 0.$$

Soit $2h$ la distance du point H au sommet de la parabole.

L'équation générale des surfaces de révolution

$$(1) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta)^2 = 0$$

devra satisfaire aux conditions suivantes :

$$\alpha^2 = 1, \quad \beta = 0, \quad a + \alpha\delta = p, \quad b = 0,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 - r^2 - \delta^2 = 0, \quad h(1-\gamma^2) = c + \gamma\delta.$$

L'équation (1) devient alors, en prenant $\alpha = +1$,

$$(2)\quad y^2 + (1-\gamma^2)z^2 - 2\gamma xz - 2px - 2h(1-\gamma^2)z = 0.$$

Les coordonnées du centre de la sphère

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0$$

devant satisfaire constamment aux équations

$$b = 0, \quad c - \gamma(a-p) - h(1-\gamma^2) = 0,$$

quel que soit γ, il s'ensuit que les équations de l'axe de révolution des surfaces (2) sont

$$(3)\qquad y = 0, \quad z - \gamma(x-p) - h(1-\gamma^2) = 0.$$

Remarquons tout de suite que la valeur $\alpha = -1$ n'a d'autre effet que de faire changer le signe de γ dans les équations (2) et (3). Il est donc inutile de la considérer.

Soient x_0, o, z_0 les coordonnées du point A. L'axe de révolution des surfaces (2) devant passer en A, on aura

$$z_0 - \gamma(x_0 - p) - h(1-\gamma^2) = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à γ,

$$h\gamma^2 - (x_0 - p)\gamma + z_0 - h = 0.$$

Cette équation détermine deux valeurs de γ en fonction des coordonnées du point A. Ces valeurs seront réelles si l'on a

$$(x_0 - p)^2 - 4h(z_0 - h) \geq 0;$$

donc, si le point A est extérieur à la parabole

$$(x-p)^2 - 4h(z-h) = 0,$$

il y a *deux* surfaces de révolution dont l'axe passe en A ; il n'y en a plus qu'*une* si ce point est sur la parabole.

Enfin, pour tout point intérieur à cette même parabole, les surfaces de révolution sont imaginaires.

La parabole qui limite ainsi les régions où les surfaces sont réelles est l'*enveloppe* des axes de révolution de ces surfaces. Elle a son axe parallèle à l'axe des z, et elle est tangente en son sommet à la droite $z - h = 0$.

Si l'on écrit ainsi son équation dans le plan des xz,

$$(z - 2h)^2 + (x + z - p)(x - z - p) = 0,$$

on voit encore qu'elle est tangente aux deux droites

$$x + z - p = 0, \quad x - z - p = 0,$$

les points de contact étant sur la droite

$$z - 2h = 0,$$

et ayant pour abscisses $p - 2h$ et $p + 2h$.

En faisant $y = 0$ dans l'équation (2), on obtient la section méridienne des surfaces qu'elle représente. Son équation dans le plan des xz est donc

$$(4) \quad (1 - \gamma^2)z^2 - 2\gamma xz - 2px - 2h(1 - \gamma^2)z = 0.$$

Elle est toujours du genre hyperbole, tant que l'on a $\gamma \gtrless 0$; par suite les surfaces (2) ne peuvent être que des *hyperboloïdes* ou des *cônes*, tant que γ est différent de zéro.

Le z du centre de la méridienne étant égal à $-\frac{p}{\gamma}$, on voit que ce centre s'éloigne à l'infini, si γ tend vers zéro. Pour $\gamma = 0$, la section méridienne est la parabole

$$z^2 - 2px - 2hz = 0,$$

et la surface de révolution est un *paraboloïde*.

Il faut maintenant distinguer les cas où les surfaces (2) sont des hyperboloïdes à une nappe de ceux où elles

sont des hyperboloïdes à deux nappes, ou des cônes. Il suffit pour cela de déterminer les points d'intersection de leur axe avec la section méridienne (4).

L'équation qui donne le z de ces points est

$$\gamma(1+\gamma^2)z^2 + 2p(1+\gamma^2)z - 2ph(1-\gamma^2) + 2p^2\gamma = 0.$$

Cette coordonnée sera réelle si l'on a

$$(p+2h\gamma)(1-\gamma^2) \geqq 0;$$

donc, si l'on a

$$(p+2h\gamma)(1-\gamma^2) > 0,$$

il y a deux points d'intersection réels et distincts ; et par suite l'équation (2) représente un *hyperboloïde à deux nappes*.

Si l'on a

$$(p+2h\gamma)(1-\gamma^2) = 0,$$

les deux points d'intersection sont confondus en un seul, et l'équation (2) représente un *cône*.

Enfin, si l'on a

$$(p+2h\gamma)(1-\gamma^2) < 0,$$

les points d'intersection sont imaginaires, et l'on a un *hyperboloïde à une nappe*.

Or, il est facile de voir que le produit ci-dessus est positif si γ varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2h}$, et de -1 à $+1$; qu'il est au contraire négatif si γ varie de $-\frac{p}{2h}$ à -1, et de $+1$ à $+\infty$; et qu'enfin il est nul si γ prend les valeurs $-\frac{p}{2h}$, -1 et $+1$. On suppose $p > 2h$.

Donc, si γ varie de $-\infty$ à $-\frac{p}{2h}$, ou de -1 à $+1$, on a des *hyperboloïdes à deux nappes*.

Si γ varie de $-\frac{p}{2h}$ à -1 ou de $+1$ à $+\infty$, on a des *hyperboloïdes à une nappe.*

Et pour les valeurs de γ égales à $-\frac{p}{2h}$, -1, $+1$, on a des *cônes.*

Il faut encore remarquer que, si γ varie de -1 à $+1$, on obtient, pour $\gamma = 0$, un *paraboloïde.* C'est la limite commune des deux séries d'hyperboloïdes à deux nappes, obtenus en faisant croître γ de -1 à zéro, ou en le faisant décroître de $+1$ à zéro.

Les axes des trois cônes ont pour équations dans le plan des xz

$$2px + 4hz - p^2 - 4h^2 = 0,$$

$$x + z - p = 0,$$

$$x - z - p = 0,$$

et l'axe du paraboloïde

$$z - h = 0.$$

Le premier de ces axes touche la parabole limite sur l'axe des z. Quant aux autres, nous connaissons déjà leur position.

La discussion a été faite en supposant $p > 2h$; elle serait aussi facile, et presque semblable, en supposant $p < 2h$.

Mais, si $p = 2h$, le premier cône se confond avec le second. Toute valeur de γ moindre que $+1$ donne un hyperboloïde à deux nappes, tandis que toute valeur supérieure à $+1$ donne un hyperboloïde à une nappe.

Note. — La même question a été résolue par MM. Escary, Tourrettes et Moret-Blanc.

Décomposition du carré d'un nombre N et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme $x^2 + t.y^2$, t étant un nombre rationnel positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équations indéterminées

$$y = x^2 + t(x + \alpha)^2, \quad y^2 = z^2 + t(z + \beta)^2;$$

Par M. E. de JONQUIÈRES.

---

1. Les formules que j'ai données dans la livraison du mois de juin dernier (t. XVII, p. 246) permettent de décomposer immédiatement, en une somme de deux carrés, le carré N^2 du produit d'un nombre quelconque de facteurs premiers qui ont cette même forme et, par un changement convenable et bien déterminé dans les signes des différents termes dont elles se composent, font connaître toutes les décompositions de même espèce du carré de ce produit.

J'ajoute que, moyennant une très-légère modification, ces formules servent pour décomposer en une somme quadratique de la forme $x^2 + t.y^2$ le carré N^2 du produit d'un nombre quelconque n de facteurs ayant tous cette même forme. Pour cela, il suffit d'y remplacer par $\sqrt{t}.b_i$ la quantité qui y est généralement désignée par b_i. Chacun des facteurs premiers de N est alors égal à une somme telle que $a_i^2 + tb_i^2$, et d'une seule manière si t est positif (*).

Cette substitution change les formules (1) dont il s'agit

(*) Legendre démontre dans la *Théorie des nombres*, 2e Partie, n° 234, que *tout nombre premier qui est de la forme $x^2 + ty^2$, t étant un nombre positif, ne peut être qu'une seule fois de cette forme.*

en celles-ci :

$$(1')\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \Pi_n(a^2 - t.b^2) - 2^2\Sigma\left[\Pi_2(a\sqrt{t}.b)\Pi_{n-2}(a^2 - t.b^2)\right] \\ &\qquad + 2^4\Sigma\left[\Pi_4(a\sqrt{t}.b)\Pi_{n-4}(a^2 - t.b^2)\right] - \ldots \\ y &= 2\Sigma\left[\Pi_1(a\sqrt{t}.b)\Pi_{n-1}(a^2 - t.b^2)\right] \\ &\quad - 2^3\Sigma\left[\Pi_3(a\sqrt{t}.b)\Pi_{n-3}(a^2 - t.b^2)\right] + 2^5\Sigma[\ldots] - \ldots, \end{aligned} \right.$$

dont tous les termes recevront successivement les changements de signe indiqués à la page 289 de l'article précité, si l'on veut obtenir toutes les décompositions distinctes, dans chacune desquelles les composants x et y sont premiers entre eux, et qui sont encore ici les seules intéressantes à considérer.

On remarquera que $\sqrt{t}$ ne figure dans la valeur de y que comme facteur commun de tous les termes et par conséquent disparaît, pour devenir t, lorsqu'on élève y au carré en formant la somme $x^2 + t.y^2 = N^2$.

J'ajoute enfin que toutes les décompositions de cette *espèce* dérivent une à une, et par la même loi que dans le cas primitif, de celles de même forme du nombre N lui-même et sont, comme celles-ci, au nombre de 2^{n-1}.

II. Lorsque, parmi les facteurs premiers de N, il en est qui ne sont pas décomposables en une somme quadratique de la forme donnée $x^2 + t.y^2$, il n'en faut pas conclure immédiatement, comme dans le cas de $t = 1$, que chacun de ceux-ci doive entrer avec un exposant pair dans la composition de N, pour que le nombre N soit décomposable de la façon requise. Cette condition ne subsiste que pour ceux d'entre eux qui ne sont pas des *divisions linéaires* de la formule $x^2 + t.y^2$, en conservant à cette expression le sens que lui ont donné Lagrange et Legendre dans sa *Théorie des nombres* (2e Partie, § X à XIII, 2e édition). Il faut donc s'assurer

préalablement quels sont ceux qui sont des diviseurs linéaires, soit par un calcul direct, soit en se servant des Tables dressées dans ce but par Legendre (Tables IV, V, VI et VII), lorsque le nombre t s'y trouve compris.

On aura ainsi réduit le nombre N à la forme PQR ; P étant le produit des p facteurs premiers qui ne sont ni diviseurs quadratiques, ni diviseurs linéaires de $x^2 + ty^2$; Q exprimant le produit des q facteurs premiers de N qui sont diviseurs linéaires, mais non quadratiques ; enfin R représentant le produit des r diviseurs quadratiques du nombre N.

Le carré N^2 étant égal à $P^2 . Q^2 . R^2$, on sait déjà que P^2 n'est pas décomposable et que les formules (1') donnent les 2^{r-1} décompositions de R^2, dans chacune desquelles les composants x et y sont premiers entre eux. Il reste à savoir décomposer Q^2.

III. Or, d'après un théorème démontré par Legendre, *loco citato,* lorsqu'un nombre est diviseur linéaire d'une forme quadratique donnée $x^2 + t.y^2$, sans être en même temps diviseur quadratique de cette forme, il existe toujours un nombre entier, moindre que $2\sqrt{\frac{t}{3}}$, tel qu'il suffit de multiplier par ce nombre auxiliaire le diviseur linéaire pour rendre ce dernier diviseur quadratique. En conséquence, on multipliera chacun des q facteurs de Q par le nombre α convenable, et l'on transformera ainsi Q en un produit de la forme $(\alpha_1 q_1)(\alpha_2 q_2)(\alpha_3 q_3)\ldots = A.Q$. Comme tous les facteurs $\alpha_i q_i$ de AQ sont actuellement de la forme requise $a^2 + t.b^2$, les formules (1') donneront immédiatement les 2^{q-1} décompositions, de dernière espèce à un facteur près, dont $A^2 Q^2$ est susceptible. Parmi elles, il y en aura dont les deux nombres composants seront de la forme $A.x$, $A\sqrt{t}.y$, c'est-à-dire qui auront

en commun le facteur A, produit de tous les nombres auxiliaires α_1, α_2, α_3, ...

En effet, s'il n'y en avait aucune dans ce cas, le nombre Q ne serait donc décomposable d'aucune manière en une somme quadratique de la forme $x^2 + ty^2$, ce qui ne peut être, puisqu'il a, par hypothèse, pour facteurs premiers des diviseurs linéaires de cette forme et que, d'après un théorème connu (*Théorie des nombres*, § XIII, n° 231), tout produit de deux tels diviseurs est un diviseur quadratique de la même forme. En divisant par A les deux composants de chacun de ces systèmes, on connaîtra les composants eux-mêmes de tous les systèmes de dernière espèce que comporte la décomposition de Q^2, systèmes qui sont d'ailleurs en même nombre que ceux de Q et qui en dérivent directement un à un.

IV. La décomposition de $N^2 = P^2 Q^2 R^2$ sera ainsi rendue facile, soit par de simples multiplications des nombres obtenus, si l'on ne veut pas obtenir les décompositions de la dernière espèce, soit, si l'on ne recherche que ces dernières, en appliquant directement les formules (1′) à la décomposition du nombre

$$(AQR)^2 = (\alpha_1 q_1)(\alpha_2 q_2) \ldots r_1 r_2 r_3 \ldots,$$

dont tous les facteurs ont la forme quadratique $a^2 + t.b^2$, mais en ne prenant, bien entendu, parmi elles, que celles appartenant à des systèmes dont les deux composants auront A pour facteur commun, ainsi qu'on l'avait fait pour obtenir les décompositions de Q^2; soit enfin (ce qui est plus simple encore) en décomposant par les mêmes formules le carré du nombre N′, obtenu en posant

$$N' = (\alpha_1 \alpha_2 q_1 q_2)(\alpha_3 \alpha_4 q_3 q_4) \ldots (\alpha_{2q+1} - q_{1q+1}) R,$$

et en opérant de même sur les résultats obtenus.

V. Voici quelques exemples de ces différents cas :

1° Soient $t = 2$, $N = 10659 = 3.11.17.19$. On a

$$3 = (1^2 + 2.1^2),\quad 11 = (3^2 + 2.1^2),$$
$$17 = (3^2 + 2.2^2),\quad 19 = (1^2 + 2.3^2),$$

et les formules (1′) donnent, pour la première des huit solutions de la dernière espèce,

$$\overline{10659}^2 = \overline{8159}^2 + 2.\overline{4850}^2.$$

2° Si $t = 3$, $N = 53599 = 7.13.19.31$, on a

$$7 = (2^2 + 3.1^2),\quad 13 = (1^2 + 3.2^2),$$
$$19 = (4^2 + 3.1^2),\quad 31 = (2^2 + 3.3^2),$$

et les formules (1′) donnent, pour la première des huit solutions de la dernière espèce,

$$\overline{53599}^2 = \overline{31273}^2 + 3.\overline{25132}^2.$$

Dans les deux exemples qui précèdent, tous les facteurs de N étaient des diviseurs quadratiques de la forme requise $x^2 + ty^2$. En voici d'autres où cette condition n'est remplie qu'en partie, ou même pas du tout, les facteurs étant alors simplement des diviseurs linéaires de la formule.

3° $t = 5$, $N = 189 = 3.7.9 = 3.7(2^2 + 5.1^2)$.

Les multiplicateurs propres à rendre quadratiques les facteurs 3 et 7, diviseurs linéaires de la forme $x^2 + 5y^2$, sont ici respectivement 2 et 2 ; on a ainsi

$$4N = 6.14.9 = 189 = (1^2 + 5.1^2)(3^2 + 5.1^2)(2^2 + 5.1^2),$$

et les formules (1′) donnent les quatre solutions de dernière espèce

$$x_1 = 4.99,\quad y_1 = 4.72;\quad x_2 = 4.149,\quad y_2 = 4.52;$$
$$x_3 = 4.171,\quad y_3 = 4.36;\quad x_4 = 4.61,\quad y_4 = 4.80.$$

qui, étant divisées par 4, produit des deux multiplicateurs auxiliaires, donnent les quatre systèmes de décomposition de dernière espèce de $\overline{189}^2$.

4° $t = 15$, $N = 17.23.19 = 7429$. Les facteurs 17 et 23 sont diviseurs linéaires, tandis que 19 est diviseur quadratique. En écrivant

$$N = (17.23).19 = (16^2 + 15.3^2)(2^2 + 15.1^2),$$

et appliquant les formules (1′) à ce produit de *deux* facteurs quadratiques, on trouve les deux solutions de dernière espèce

$$\overline{7429}^2 = \overline{7091}^2 + 15.\overline{572}^2 \quad \text{et} \quad \overline{7429}^2 = \overline{4429}^2 + 15.\overline{1540}^2.$$

5° $t = 19$, $N = 5.7.11 = 385$. Le multiplicateur quadratique est ici 4 pour les trois facteurs, d'où

$$64.N = (1^2 + 19.1^2)(3^2 + 19.1^2)(5^2 + 19.1^2)$$

et les formules (1′) donnent l'unique solution

$$N^2 = \overline{223}^2 + 19.\overline{72}^2,$$

correspondante à celle de $N = 385 = 9^2 + 19.4^2$, qui est aussi unique. Quant aux trois autres décompositions fournies par les formules (1′), savoir :

$$x_2 = 32.751, \quad x_3 = 32.769, \quad x_4 = 32.599,$$
$$y_2 = 32.39, \quad y_3 = 32.9, \quad y_4 = 32.111,$$

elles sont étrangères à la question, puisque les composants ont 32 pour facteur commun, au lieu de 64.

6° t, négatif, $= -3$,

$$N = 481 = 13.37 = (5^2 - 3.2^2)(7^2 - 3.2^2).$$

La formule générale (1′) donne les deux solutions

$$\overline{481}^2 = \overline{577}^2 - 3.\overline{184}^2 = \overline{3937}^2 - 3.\overline{2256}^2.$$

Le cas de t fractionnaire sera examiné plus loin.

(*La suite prochainement.*)

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE $X^3+Y^3=AZ^3$;

Par M. Édouard LUCAS.

On a le théorème suivant :

Pour que l'équation proposée soit vérifiée par des valeurs entières de X, Y, Z, A, *il faut et il suffit que* A *appartienne à la forme* $xy(x+y)$ *préalablement débarrassée de ses facteurs cubiques.*

En effet, on a l'identité

$$[x^3-y^3+6x^2y+3xy^2]^3+[y^3-x^3+6y^2x+3yx^2]^3$$
$$=xy(x+y).3^3[x^2+xy+y^2]^3,$$

et l'on résout l'équation proposée, par les valeurs

$$X=x^3-y^3+6x^2y+3xy^2,$$
$$Y=y^3-x^3+6y^2x+3yx^2,$$
$$Z=3(x^2+xy+y^2),$$
$$A=xy(x+y).$$

Réciproquement, si l'équation est vérifiée pour les valeurs x_0, y_0, z_0 des variables, et si l'on pose

$$x=x_0^3, \quad y=y_0^3,$$

on a

$$xy(x+y)=A(x_0y_0z_0)^3.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. Il résulte encore de l'identité précédente que toute solution de l'équation proposée conduit à une série indéfinie de solutions nouvelles, en supposant A constant. Il faut excepter le cas de $x=\pm y$.

Exemple. — Pour $x=1$, $y=2$, on a la solution

$$17^3+37^3=6.21^3;$$

de laquelle on déduit une série indéfinie d'autres solutions. On observera ainsi que l'équation

$$x^3 + y^3 = 6z^3$$

a une infinité de solutions, bien que Legendre ait affirmé le contraire. On peut aussi trouver d'autres identités, en nombre illimité, et ainsi la suivante :

$$\begin{aligned}[x^3 + 3x^2y - y^3]^3 + [3xy(x+y)]^3 \\ = [x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3][x^2 + xy + y^2]^3,\end{aligned}$$

de laquelle il résulte que le polynôme

$$x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3$$

n'est jamais égal au cube d'un nombre entier, ni à son double, à son triple, à son quadruple ou à son quintuple.

CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. Hilaire, Professeur à Douai.* — Permettez-moi de vous communiquer quelques observations sur le problème donné en Mathématiques élémentaires au Concours général de 1877, et dont je trouve une solution (p. 213) (*).

Je remarque d'abord que le centre de l'ellipse est évidemment le point du plan bissecteur qui a le point p pour projection orthogonale sur le plan P : donc ce point ne se confond avec le point a que quand la droite Aa est perpendiculaire à la fois au plan bissecteur et au

(*) La seconde solution (page 268) n'était pas encore publiée lorsque nous avons reçu la lettre de M. Hilaire.

plan P, c'est-à-dire quand les plans P et P' sont parallèles.

Je vais montrer ensuite que la question tout entière est une application immédiate des propriétés focales dans les surfaces du second degré.

En effet, les points C appartiennent au lieu des points équidistants du point A et du plan P : ce lieu est un paraboloïde de révolution, ayant pour foyer le point A, pour axe la perpendiculaire menée du point A sur le plan P, et pour sommet le point situé sur cet axe, à égale distance du point A et du plan P : l'ellipse est précisément la section de ce paraboloïde par le plan bissecteur.

Or, d'après un théorème connu (*voir*, par exemple, SALMON, *Géométrie à trois dimensions*), le cône, ayant pour sommet un foyer d'une surface de révolution et pour base une section plane quelconque de cette surface, est lui-même de révolution, et il a pour axe la droite joignant le foyer au pôle du plan de la section.

Il résulte de là que le cône formé par les droites AC est *toujours* de révolution.

Quant au fait que l'ellipse se projette suivant un cercle sur le plan P, il se rattache aux mêmes propriétés. Pour le faire voir, il suffit d'appliquer le théorème précédent au foyer situé à l'infini sur l'axe du paraboloïde. Le cône, dont le sommet s'éloigne à l'infini, devient un cylindre.

L'axe de ce cylindre de révolution joint toujours le foyer au pôle du plan de la section ; mais, d'une part, le foyer est à l'infini sur l'axe du paraboloïde, et, d'autre part, le pôle, qui doit toujours se trouver sur le diamètre conjugué du plan, est sur une parallèle à l'axe du paraboloïde. Donc l'axe du cylindre se confond avec ce diamètre du paraboloïde ; par suite il est perpendiculaire

au plan P, et le plan P doit couper le cylindre suivant un cercle.

2. Les questions 1225, 1230, 1235, 1251, 1254 ont été résolues par MM. Dunoyer, Pisani, Lez, S. K., à Vienne, N. Androwski, à Varsovie.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Teoria generale dei logaritmi; per l'ing. *Pietro Caminati,* Professore titolare di Matematica nel R. Istituto tecnico di Sondrio.
Estratto dalla Rivistà di Matematica elementare, vol. V. Novara, tipografia Novarese di N. Lenta (1878).

2. Démonstration de deux théorèmes analogues, en Géométrie de l'espace, à celui de Pascal en Géométrie plane; essai de réponse à une question posée, en 1825, par l'Académie de Bruxelles.
Par M. *Sautreaux Félix*, étudiant en Mathématiques, à Nice.
Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*; 2e série, t. XLV, n° 4; avril 1878.

3. Théorèmes d'Arithmétique, par *Édouard Lucas.* Imprimerie royale de Turin, 1878.

4. Mémoire sur les lois de réciprocité relatives aux résidus de puissances; par le P. Thle Pépin, S. J. Extrait des *Atti dell' Accademia de' nuovi Lincei.*

REMARQUES SUR LES PROPRIÉTÉS DU NOMBRE 10;

Par M. L. HUGO.

Dans les *Nouvelles Annales* (1878, p. 382), M. Gerono a cité le théorème de M. de Jonquières, relatif au nombre 5. Ce théorème conduit naturellement au suivant, qui a son intérêt, eu égard à l'importance du nombre 10 :

Le nombre 10 *est le seul entier dont l'une des moitiés soit la somme des carrés de deux entiers consécutifs, l'autre moitié ayant pour carré la somme des carrés de deux entiers consécutifs.*

De plus, *les entiers consécutifs sont eux-mêmes consécutifs en groupe* (1, 2, 3, 4), *et leur somme est* 10.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 140

(voir 1re série, t. VI, p. 140);

Par M. H. BROCARD.

En projetant cylindriquement deux hyperboles conjuguées sur un plan, les projections sont des hyperboles CONJUGUÉES. *Mais que deviennent les hyperboles conjuguées en les projetant* CONIQUEMENT *sur un plan ?*

Soient, dans un plan P, deux hyperboles conjuguées

admettant pour asymptotes communes les droites AOA′, BOB′. Soit S le sommet du cône. Par ce point faisons passer un plan M parallèle au plan N sur lequel nous cherchons la trace du cône. Ce plan M renfermera quatre génératrices du cône SC, SD, SE, SF, parallèles au plan N. Dans ces quatre directions il existe, à l'infini sur le plan N, un point de la section. Celle-ci se compose donc de deux hyperboles ayant quatre asymptotes parallèles aux quatre directions indiquées ci-dessus. Leurs centres sont différents, car les projections coniques des diamètres cessent d'être des diamètres des projections des courbes; ainsi les hyperboles ne sont plus conjuguées. Quant aux plans passant par le sommet S et les deux asymptotes AOA′, BOB′, leurs traces sur le plan N ne sont plus des asymptotes aux hyperboles trouvées; ce sont simplement des droites qui, évidemment, ne les rencontrent pas.

Question 1255

(voir 2e série, t. XVII, p. 237);

PAR M. EUGÈNE DELMAS,
Élève du lycée de Lyon.

D'un point M *on mène des parallèles aux côtés d'un triangle* ABC, *qui rencontrent respectivement les deux autres côtés en des points* a, α; b, β; c, γ : *démontrer que la somme*

$$\mathrm{M}a\,\mathrm{M}\alpha + \mathrm{M}b\,\mathrm{M}\beta + \mathrm{M}c\,\mathrm{M}\gamma$$

est égale à la puissance du point M, *par rapport au cercle circonscrit au triangle.*

H. SCHRÖTER.

En prenant pour triangle de référence le triangle ABC, le point M est défini par les longueurs α', β', γ' des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés BC, AC, AB.

On a, d'une part, les relations

$$\mathrm{M}a = \frac{\gamma'}{\sin B}, \quad \mathrm{M}\alpha = \frac{\beta'}{\sin C},$$

$$\mathrm{M}b = \frac{\alpha'}{\sin C}, \quad \mathrm{M}\beta = \frac{\gamma'}{\sin A},$$

$$\mathrm{M}c = \frac{\beta'}{\sin A}; \quad \mathrm{M}\gamma = \frac{\alpha'}{\sin B}.$$

Il s'ensuit

$$\mathrm{M}a\,\mathrm{M}\alpha + \mathrm{M}b\,\mathrm{M}\beta + \mathrm{M}c\,\mathrm{M}\gamma = \frac{\beta'\gamma'}{\sin B \sin C} + \frac{\alpha'\gamma'}{\sin C \sin A} + \frac{\beta'\alpha'}{\sin A \sin B}.$$

D'autre part, lorsque, dans l'équation

$$\beta\gamma \sin A + \alpha\gamma \sin B + \alpha\beta \sin C = 0$$

du cercle circonscrit au triangle de référence, on remplace α, β, γ par α', β', γ', le premier membre représente, en valeur absolue, le produit de $\sin A . \sin B . \sin C$, par le carré de la tangente menée au cercle par le point M (*); donc la puissance du point M est, en valeur absolue,

$$\frac{\beta'\gamma'}{\sin B \sin C} + \frac{\alpha'\gamma'}{\sin C \sin A} + \frac{\beta'\alpha'}{\sin A \sin B}$$

ou

$$\mathrm{M}a\,\mathrm{M}\alpha + \mathrm{M}b\,\mathrm{M}\beta + \mathrm{M}c\,\mathrm{M}\gamma. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Moret-Blanc; Droz; Guillet; Barbarin; Kœnigs.

(*) SALMON. *Coniques*, 4e édition, p. 125, n° 132.

élève à l'école de l'Immaculée-Conception, à Toulouse; Michel; Armand Bertrand, propriétaire à Azillanet; J. Chambon; Michel.

M. Bertrand fait observer qu'en nommant S la surface du triangle qui a pour sommets les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés du triangle ABC, la puissance du point M, par rapport au cercle circonscrit, a pour expression $\frac{2S}{\sin A \sin B \sin C}$.

QUESTIONS.

1285. Étant donnés cinq points dans l'espace et un plan, on demande :

1° Le lieu décrit par les sommets des cônes qui passent par les cinq points et sont tangents au plan;

2° L'enveloppe de leurs génératrices de contact avec le plan. (Genty.)

1286. Deux droites de même longueur OA, OB et un point P sont donnés; une droite mobile passant par le point P coupe OA en a, et OB en b. On décrit deux cercles ayant pour centres a et b, et qui passent respectivement par A et B : trouver le lieu géométrique des points communs à ces deux cercles. (Droz.)

1287. Soient A et B les extrémités de deux rayons conjugués variables d'une ellipse; trouver l'enveloppe des cercles décrits sur AB, comme diamètre.

(Barbarin.)

Décomposition du carré d'un nombre N *et de ce nombre lui-même en sommes quadratiques de la forme* $x^2 + ty^2$, *t étant un nombre rationnel, positif ou négatif; résolution en nombres entiers du système des équations indéterminées*

$$y = x^2 + t(x+\alpha)^2,\quad y^2 = z^2 + t(z+\beta)^2;$$

(FIN (*).)

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Dans le cas de t négatif, dont je viens de donner un exemple, il importe d'ajouter que les décompositions fournies par les formules (1') sont, en moindres nombres, celles de chacune desquelles il en découle une infinité d'autres par les relations

$$(4)\qquad x = x_1 r \pm t\,.\,y_1 s,\quad y = x_1 s \pm y_1 r,$$

r et s étant des indéterminées données par l'équation $(m + n\sqrt{t})^k = r + s\sqrt{t}$, dans laquelle k est un entier quelconque, et m, n sont les moindres nombres qui satisfont à l'équation $m^2 - tn^2 = 1$. (Voir *Théorie des nombres,* Ire Partie, § 40).

Dans l'exemple précédent, les moindres nombres qui satisfont à l'équation $m^2 - 3n^2 = 1$ sont $m = 2$, $n = 1$; ainsi r et s sont donnés, dans ce cas, par la formule $r + s\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^k$.

Si l'on prend d'abord $k = 1$, on a $r = 2$, $s = 1$; la seconde décomposition de N^2 donne pour N celle-ci

$$481 = \overline{23}^2 - 3.\overline{4}^2,$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 41[illegible].

et les formules (4) deviennent

$$x = 23.2 \pm 3.8, \quad y = 23 \pm 8.2.$$

On en déduit, pour la plus simple des décompositions de 481 après celle que je viens d'écrire,

$$481 = \overline{34}^2 - 3.\overline{15}^2.$$

Les formules (4) en fournissent ensuite une infinité d'autres.

VI. Il reste à examiner, comme je l'ai fait au § XI de l'article précité des *Nouvelles Annales*, page 303, le cas où le nombre donné N se compose de facteurs premiers élevés chacun à une puissance quelconque, et non plus seulement de facteurs du premier degré. Sans entrer, à cet égard, dans des développements qui m'entraîneraient trop loin, je me bornerai à dire que, si cette circonstance fait croître le nombre total des décompositions de N, elle n'augmente pas celui des décompositions de ce nombre dans lesquelles les composants sont premiers entre eux. Au contraire, si parmi les facteurs premiers de N il en existe qui, au lieu d'être décomposables dans la forme donnée $x^2 + ty^2$, sont simplement des diviseurs linéaires d'une même forme quadratique associée à celle-là, le nombre de ces décompositions est diminué lorsque ces facteurs n'entrent pas par paires avec le même exposant dans la composition de N, ou avec des exposants différant entre eux d'un nombre pair d'unités. La même influence se fait d'ailleurs sentir alors sur les décompositions propres de N^2, et la correspondance qui lie celles-ci à celles de N n'est pas troublée.

Supposons, par exemple, que le nombre à décomposer soit $N = 57967 = 7^3.13^2$, et que la forme requise soit $x^2 + 3y^2$. Les facteurs premiers 7 et 13 sont l'un et

l'autre de cette forme. Leurs exposants respectifs étant d'ailleurs 3 et 2, le nombre total des décompositions de N est, d'après la formule connue, égal à $\frac{1}{2}(3+1)(2+1)=6$, c'est-à-dire plus grand de quatre unités que celui des décompositions de même forme du nombre $7.13=91$, qui ne comporte que ces deux-ci :

$$91=8^2+3.3^2=4^2+3.5^2;$$

mais, parmi ces six décompositions de N, il n'en existe pareillement que deux où les composants soient premiers entre eux; ce sont les suivantes :

$$N=2^2+3.\overline{139}^2=\overline{218}^2+3.\overline{59}.$$

Dans les quatre autres, savoir

$$\begin{aligned} N &= 7^2\left(10^2+3.\overline{19}^2\right)=7^2(34^2+3.3^2)\\ &= 13^2(10^2+3.9^2)=7^2.13^2(2^2+3.1^2), \end{aligned}$$

les composants ont pour facteur commun, respectivement, les nombres 7^2, 13^2 et $7^2.13^2$.

Quant aux décompositions possibles de N^2, il n'y en a également que deux *propres* ou de dernière espèce, savoir

$$N^2=\overline{57959}^2+3.\overline{556}^2 \quad \text{et} \quad N^2=\overline{37081}^2+3.\overline{25724}^2,$$

correspondant, respectivement, à celles de N écrites ci-dessus en premier lieu. Dans toutes les autres, les composants ont un facteur commun.

Prenons, pour second exemple, la forme x^2+19u^2 et le nombre $N=6125=5^3.7^2$. Ici les facteurs 5 et 7 ne sont plus, comme précédemment, des diviseurs quadratiques : ce sont de simples diviseurs linéaires de la forme requise. Cette circonstance, jointe à ce que le facteur 5 a l'exposant 3, tandis que 13 n'a que l'exposant 2,

fait que N n'est susceptible d'aucune décomposition où les composants soient premiers entre eux, et il en est de même, par conséquent, de N^2. En effet, les seules décompositions possibles de N sont

$$6125 = 5^2(13^2 + 19.2^2) = 7^2(7^2 + 19.2^2),$$

auxquelles correspondent, respectivement, celles de N^2

$$\overline{6125}^2 = 5^4(\overline{93}^2 + 19.\overline{52}^2) = 7^4(\overline{27}^2 + 19.\overline{28}^2).$$

Mais, si le nombre donné avait été $N = 1225 = 5^2.7^2$, les formules $(1)'$ auraient donné

$$\overline{1225}^2 = (\overline{1207}^2 + 19.\overline{48}^2),$$

d'où

$$1225 = 3^2 + 19.8^2,$$

parce que les exposants de 5 et de 7 sont ici égaux entre eux, etc.

VII. Avant d'entamer un autre sujet, il me reste à dire quelques mots touchant le cas de t fractionnaire, $t = \frac{p}{q}$.

Lorsque tous les facteurs du nombre N sont de la forme $a^2 + \frac{p}{q}b^2$, ou y ont été ramenés, les formules $(1)'$ donnent, aussi bien que dans le cas de t entier, toutes les décompositions de dernière espèce $X^2 + \frac{p}{q}Y^2$ de son carré N^2. Puis lorsqu'on veut revenir de ces décompositions à celles $x^2 + \frac{p}{q}y^2$ de N qui leur correspondent, on se sert, comme dans les autres cas, des formules

$$(2) \qquad x^2 = \frac{N+X}{2}, \quad y^2 = \frac{N-X}{2t},$$

dont la composition montre que, si l'on a seulement

pour but de trouver les représentations de N dans la forme $u^2 + \frac{p}{q} v^2$, on peut se dispenser de calculer les valeurs de Y.

Mais en outre, si l'on remplace (*) les formules (1)′ par les suivantes :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} X &= \Pi_n(qa^2 - pb^2) \\ &\quad - 2^2 pq \; \Sigma[\Pi_2\, ab \,.\, \Pi_{n-2}(qa^2 - pb^2)] \\ &\quad + 2^4 p^2 q^2 \; \Sigma[\Pi_4\, ab \,.\, \Pi_{n-4}(qa^2 - pb^2)] \\ &\quad - 2^6 p^3 q^3 \; \Sigma[\Pi_6\, ab \,.\, \Pi_{n-6}(qa^2 - pb^2)] + \ldots, \\ \sqrt{\frac{q}{p}}\, Y &= 2q \; \Sigma[\Pi_1\, ab \,.\, \Pi_{n-1}(qa^2 - pb^2)] \\ &\quad - 2^3 pq^2 \Sigma[\Pi_3\, ab \,.\, \Pi_{n-3}(qa^2 - pb^2)] \\ &\quad + 2^5 p^2 q^3 \Sigma[\Pi_5\, ab \,.\, \Pi_{n-5}(qa^2 - pb^2)] - \ldots, \end{aligned} \right.$$

celles-ci donnent les décompositions propres, dans la forme $X^2 + \frac{p}{q} Y^2$, du carré N^2 d'un nombre N dont tous les facteurs sont de la forme $qa^2 + pb^2$; et lorsqu'on veut passer de ces décompositions à celles $x^2 + \frac{p}{q} y^2$ correspondantes, il se présente cette particularité, qui n'avait pas lieu dans la précédente, que les nombres $\frac{N + X}{2}$,

(*) La modification apportée n'est d'ailleurs pas aussi grande qu'on pourrait le croire au premier aperçu, car les formules (1)′, où j'ai avec intention laissé figurer le radical $\sqrt{t}$ pour mieux faire ressortir la façon dont elles dérivent des formules (1), peuvent s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} X &= \Pi_n(a^2 - t.b^2) - 2^2.t\,\Sigma[\Pi_2(ab)\,\Pi_{n-2}(a^2 - t.b^2)] \\ &\qquad + 2^4.t^2\,\Sigma[\Pi_4(ab)\,\Pi_{n-4}(a^2 - t.b^2)] \\ &\qquad - 2^6.t^3\,\Sigma[\Pi_6(ab)\,\Pi_{n-6}(a^2 - t.b^2)] + \ldots, \\ \frac{1}{\sqrt{t}}\,Y &= 2\,\Sigma[\Pi_1(ab)\,\Pi_{n-1}(a^2 - t.b^2)] \\ &\qquad - 2^3.t\,\Sigma[\Pi_3(ab)\,\Pi_{n-3}(a^2 - t.b^2)] + 2^5.t^2\,\Sigma[\Pi_5(ab)\,\Pi_{n-5}(a^2 - t.b^2)] - \ldots \end{aligned}$$

et même sont, sous cette forme, plus commodes pour le calcul numérique.

$\frac{N-X}{2t}$ ainsi obtenus, quoique satisfaisant à la relation $x^2 + \frac{p}{q} y^2 = N$, ne sont des carrés parfaits que si le nombre des facteurs de N est pair. Lorsque ce nombre est impair, on a en revanche

$$x^2 = pk^2, \quad \frac{p}{q} y^2 = qm^2 \quad \text{et} \quad pk^2 + qm^2 = N.$$

Voici quelques exemples de ces différents cas :

1° Soit $t = \frac{3}{8}$,

$$N = 16863 = 7.33.73 = \left(1^2 + \frac{3}{8} 4^2\right)\left(3^2 + \frac{3}{8} 8^2\right)\left(7^2 + \frac{3}{8} 8^2\right).$$

Les formules (1)′ donnent, pour l'une des décompositions propres de N^2,

$$N^2 = \overline{16863}^2 = \overline{13395}^2 + \frac{3}{8} \overline{16728}^2,$$

et les formules (2) donnent, pour la décomposition correspondante de N,

$$N = 16863 = \overline{123}^2 + \frac{3}{8} \overline{68}^2.$$

On obtiendrait de même les trois autres solutions.

2° Soit encore $t = \frac{3}{8}$,

$$N = 511 = 7.73 = \left(1^2 + \frac{3}{8} 4^2\right)\left(7^2 + \frac{3}{8} 8^2\right).$$

Les formules (1)′ et (2) donnent, respectivement,

$$N^2 = \overline{511}^2 = \overline{461}^2 + \frac{3}{8} \overline{360}^2 = \overline{211}^2 + \frac{3}{8} \overline{760}^2,$$

$$N = 511 = 5^2 + \frac{3}{8} \overline{36}^2 = \overline{29}^2 + \frac{3}{8} \overline{20}^2.$$

3° Soit, comme première application du cas où les facteurs de N sont de la forme $qa^2 + pb^2$,

$$\begin{aligned} N &= 94105 = 5.11.29.59 \\ &= (2.1^2 + 3.1^2)(2.2^2 + 3.1^2)(2.1^2 + 3.3^2)(2.4^2 + 3.3^2). \end{aligned}$$

Les formules (3) donnent, pour l'une des huit solutions de quatrième espèce qu'on en peut déduire,

$$N^2 = \overline{94105}^2 = \overline{72937}^2 + \frac{3}{2}\overline{48552}^2,$$

et les formules (2) donnent ensuite, pour la décomposition correspondante de N,

$$N = 94105 = \overline{281}^2 + \frac{3}{2}\overline{84}^2.$$

Dans cet exemple, le nombre des facteurs du nombre donné est pair, et les facteurs ont la forme $2a^2 + 3b^2$.

4° Soit enfin

$$\begin{aligned} N &= 1595 = 5.11.29 \\ &= (2.1^2 + 3.1^2)(2.2^2 + 3.1^2)(2.1^2 + 3.3^2), \end{aligned}$$

où le nombre des facteurs est impair, et la forme est, comme à l'exemple précédent, $2a^2 + 3b^2$; les formules (3) donnent, pour les quatre décompositions de troisième espèce de N^2,

$$\begin{aligned} N^2 = \overline{1595}^2 &= \overline{1109}^2 + \frac{3}{2}\overline{936}^2 = \overline{571}^2 + \frac{3}{2}\overline{1216}^2 \\ &= \overline{1579}^2 + \frac{3}{2}\overline{184}^2 = \overline{1541}^2 + \frac{3}{2}\overline{336}^2, \end{aligned}$$

et les formules (2) donnent, pour les décompositions correspondantes de N,

$$\begin{aligned} N = 1595 &= 243 + 1352 \\ &= 512 + 1083 = 8 + 1587 = 1568 + 27, \end{aligned}$$

où les premiers termes, qui représentent respectivement les x^2, ne sont pas des carrés, tandis que les seconds ne sont pas les $\frac{3}{2}$ d'un carré parfait y^2. Mais on peut les écrire ainsi :

$$\begin{aligned} N = 1595 &= 3.9^2 + 2.26^2 = 2.16^2 + 3.19^2 \\ &= 2.2^2 + 3.23^2 = 2.28^2 + 3.3^2, \end{aligned}$$

et l'on voit qu'ils correspondent, non plus à une décomposition de N dans la forme $a^2 + \frac{3}{2}b^2$, semblable à celle obtenue pour N^2, mais à une décomposition dans la forme $2a^2 + 3b^2$, qui est aussi, dans ce cas, celle des facteurs premiers du nombre donné N.

VIII. La correspondance et la subordination mutuelles qui lient entre elles, chacune à chacune, les décompositions en sommes quadratiques $x^2 + ty^2$ d'un nombre N avec celles, de même forme $X^2 + tY^2$ et de dernière espèce, du carré N^2 de ce nombre, constituent, avec les formules (1)', un résultat nouveau dans la *Théorie des nombres*. Pour en indiquer d'un seul trait la portée, il me suffira de faire remarquer qu'il conduit, dans une catégorie nombreuse de cas, par une marche simple et sans autres recherches préliminaires que celle des facteurs premiers de N, à une solution nouvelle des deux problèmes dont il est question dans les nos 180 et 205 des *Disquisitiones*, et qui forment deux des sujets principaux du célèbre Chapitre V de cet Ouvrage.

En effet, lorsqu'un nombre N, susceptible d'être représenté par une forme quadratique donnée $x^2 + ty^2$ [et il peut alors être représenté aussi par l'une des formes associées $p^2 + 2pq + cq^2$, $p^2 + pq + c'q^2$, dont les indéterminées p, q se déduisent immédiate-

ment des premières x, y, et réciproquement, lorsque les constantes t, a, b, c' sont données), a été décomposé en ses facteurs premiers, transformés, s'il est nécessaire, en la forme quadratique $a^2 + tb^2$ (*), les formules (1)' donnent presque aussitôt toutes les décompositions $X^2 + t.Y^2$ du carré N^2 de ce nombre, après quoi la correspondance dont il s'agit fait remonter immédiatement aux décompositions ou représentations conjuguées de N, à l'aide des formules (2), dans lesquelles le nombre composant X doit entrer avec son signe. Enfin on passe de la représentation de N dans la forme $x^2 + ty^2$ à sa représentation dans la forme à trois termes $p^2 + 2pq + cq^2$ si t est de la forme $4n + 1$, et dans celle $p^2 + pq + c'q^2$ si t est de la forme $4n + 3$, en posant, dans le premier cas, $p = x - y$, $q = y$, $c = t + 1$, et, dans le second cas, $p = x - y$, $q = 2y$, $c' = \frac{t+1}{4}$. Les problèmes précités se trouvent ainsi résolus, dans les conditions que je viens de dire et pour toutes les valeurs de t, de la façon la plus directe et la plus simple.

IX. La correspondance des décompositions propres de N et de N^2 a un autre usage important, car elle fournit une méthode générale pour la résolution, en nombres entiers quand celle-ci est possible, en nombres rationnels dans tous les cas, du système des équations indéterminées

$$y = x^2 + tu^2, \quad y^2 = z^2 + tv^2,$$

avec les conditions $u = x \pm \alpha$, $v = z \pm \beta$.

En effet, puisque chacune des valeurs de y^2, qui appartiennent à l'espèce où les nombres z et $z \pm \beta$ sont

(*) Cette transformation s'opère, comme je l'ai dit page 422, à l'aide de facteurs entiers auxiliaires, choisis de façon que leur produit total λ soit un carré parfait z^2.

premiers entre eux, dérive, par la formule des triangles rectangles, de la valeur correspondante de y, où x et u sont aussi premiers entre eux, on a d'abord

$$y^2 = (tu^2 - x^2)^2 + t.\overline{2xu}^2.$$

On en conclut, en remplaçant x par sa valeur $u - \alpha$,

$$y^2 = [tu^2 - (u - \alpha)^2]^2 + t.2u(u - \alpha)^2,$$

et, en égalant les deux expressions de y^2,

$$u^2(t - 3) + 4\alpha u - \alpha^2 \pm \beta = 0,$$

d'où

$$(3) \qquad u = \frac{1}{t-3}\left[-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + (t-3)(\alpha^2 \mp \beta)}\right],$$

relation dans laquelle, lorsque α et β auront été donnés, il faudra prendre pour t les seules valeurs qui rendent la quantité placée sous le radical égale à un carré parfait k^2. Cette condition se réduit, en écrivant

$$\alpha^2 \mp \beta = c \quad \text{et} \quad 4\alpha^2 - 3(\alpha^2 \mp \beta) = -a,$$

à $t = \frac{k^2 + a}{c}$, formule dont la solution en nombres entiers fait l'objet des §§ VII et VIII de la *Théorie des nombres* de Legendre (II[e] Partie, n[os] 185 et suivants de la deuxième édition).

Pour toutes les valeurs de t autres que celles ainsi obtenues, l'équation (3) ne donne, pour u et par suite pour x et y, que des valeurs incommensurables qui ne répondent pas à l'énoncé de la question.

X. Comme applications numériques, supposons d'abord $\alpha = \beta = 1$. Si l'on prend β avec le signe — sous le radical, la formule (3) devient $u = \frac{4}{3-t}$, en ex-

cluant la valeur illusoire $u = 0$. Si l'on ne veut que des valeurs entières pour u, cette équation n'admet que les solutions

$$t = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,$$

auxquelles correspondent, respectivement, les valeurs

$$\begin{array}{l} u = 2,\ \ 4,\ -4,\ -2,\ -1, \\ x = 1,\ \ 3,\ -5,\ -3,\ -2, \\ y = 5,\ 41,\ \ 89,\ \ 29,\ \ 11. \end{array}$$

On a, en effet, $5 = 1^2 + 2^2$ et $5^2 = 3^2 + 4^2$. C'est la solution déjà obtenue dans l'article précité des *Nouvelles Annales*; puis

$$\begin{array}{lll} 41 = 3^2 + 2.4^2 & \text{et} & \overline{41}^2 = \overline{23}^2 + 2.\overline{24}^2, \\ 89 = (-5)^2 + 4(-4)^2 & \text{et} & \overline{89}^2 = \overline{39}^2 + 4.\overline{40}^2, \\ 29 = (-3)^2 + 5(-2)^2 & \text{et} & \overline{39}^2 = \overline{11}^2 + 5.\overline{12}^2, \\ 11 = (-2)^2 + 7(-1)^2 & \text{et} & \overline{11}^2 = \overline{3}^2 + 7.\overline{4}^2. \end{array}$$

Si l'on prend β avec le signe $+$ sous le radical, la formule (3) devient

$$(4) \qquad t = \frac{1}{t-3}\left[-2 \pm \sqrt{2(t-1)}\right],$$

et ne donne des valeurs commensurables de u que pour les valeurs de t,

$$t = 3,\quad 9,\quad 19,\quad 33,\quad 51,\quad 73,\quad 99,\quad \ldots,$$

d'où

$$\begin{array}{l} u = 0,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{6},\ \ldots, \\ \quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{7},\quad \frac{1}{8},\quad \ldots, \end{array}$$

parmi lesquelles il ne se rencontre qu'une seule valeur entière de u, savoir $u = -1$, correspondante à $t = 9$,

valeur à ajouter à celles déjà trouvées, de telle sorte qu'il n'existe, en résumé, que six valeurs de t, parmi l'infinité de celles qu'il peut recevoir, pour chacune desquelles le système des équations

$$y = x^2 + t(x+1)^2, \quad y^2 = z^2 + t(z \pm 1)^2$$

admette une solution en nombres entiers x, z et y, et ces valeurs de t sont $t = 1, 2, 4, 5, 7$ et 9. Il faut remarquer, en outre, que, dans chacun de ces cas, la solution est unique, comme je l'ai déjà fait voir dans l'article précité des *Nouvelles Annales* pour celui de $t = 1$, et par des motifs analogues. En effet, d'une part, la similitude des valeurs de y et de y^2 par rapport au multiplicateur t du second terme a cette conséquence, qu'une ou plusieurs solutions nouvelles de la question ne pourraient se rencontrer que parmi les décompositions de y^2 d'une espèce inférieure à la dernière (E_n) d'où provient celle déjà obtenue, tandis que, d'autre part, la seconde condition, savoir qu'il n'y ait entre z et v qu'une seule unité de différence, ne saurait se présenter dans aucune de ces décompositions ; car leur caractère commun consiste en ce que ces deux nombres ne sont plus premiers entre eux dans la valeur de y^2, qu'ils ont un facteur commun, et que par conséquent la différence entre u et v ne pourrait, comme cela est exigé ici, être égale à l'unité.

Ce résultat, digne de remarque, vient à l'appui de l'observation déjà signalée par M. Lucas, qu'une équation indéterminée du quatrième degré à trois inconnues (à laquelle peut se réduire le système ci-dessus), qui admet une solution en nombres entiers, n'en admet très-souvent pas d'autre, contrairement à ce qui a lieu pour l'équation du troisième degré, où une première solution en entraîne une infinité d'autres.

Si l'on admet les valeurs fractionnaires de u, la formule (4) en donne une infinité, correspondantes par paires aux valeurs admissibles de t.

Pour terminer, je donnerai une application de la formule (3) au cas où α est différent de β. Soit, par exemple,

$$\alpha = 3, \quad \beta = 5.$$

Les seules valeurs admissibles de t sont alors

$$t = 3,\ 10,\ 19,\ 30,\ 43,\ 58,\ 75,\ \ldots$$

si l'on prend β avec le signe — sous le radical ; et

$$t = 3,\ \ 5,\ 29,\ 35,\ \ldots$$

si l'on prend β avec le signe + sous le radical.

Les valeurs correspondantes et conjuguées de u sont, relativement à la première suite,

$$u = \frac{1}{3},\quad \frac{2}{7},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{2}{9},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{2}{11},\quad \frac{1}{6},\quad \frac{2}{13},\quad \frac{1}{7},\quad \ldots,$$

et

$$u = \quad ,\ -2,\ -1,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{1}{4},\quad \ldots,$$

où se trouvent les seules valeurs entières $u = -2$ et $u = -1$.

Les valeurs de u, relatives à la seconde suite, sont,

$$u = \frac{7}{6},\quad 1,\quad \frac{14}{17},\quad \frac{1}{2},\quad \ldots,$$

$$u = \text{»}\ -7,\ -\frac{26}{17},\ -\frac{7}{8},\quad \ldots,$$

où l'on rencontre deux nouvelles valeurs entières de u, savoir $u = 1$, $u = -7$.

On vérifie, par exemple, que, pour $t = 10$, dans la première suite, et $u = -2$, on a

$$y = (-5)^2 + 10(-2)^2 = 65$$

et

$$y^2 = \overline{15}^2 + 10.\overline{20}^2 = \overline{65}^2,$$

où les conditions $x = u - 3$ et $u = z + 5$ sont observées.

Pour $t = 5$ et $u = -7$, dans la seconde suite, on a de même

$$y = (-10)^2 + 5.(-7)^2 = 345$$

et

$$y^2 = \overline{145}^3 + 5.\overline{140}^2 = \overline{345}^2,$$

où $x = u - 3$ et $v = z - 5$.

Dans cet exemple, comme dans plusieurs de ceux qui précèdent, on évite l'apparence des solutions négatives, en admettant que les conditions $u = x + \alpha$, $v = z + \beta$ signifient simplement que la différence entre x et u et entre z et v soit respectivement α et β en valeur absolue, sans impliquer que $u > x$, ni $v > z$. La dernière solution, par exemple, devient ainsi

$$y = 10^2 + 5.7^2, \quad y^2 = \overline{145}^3 + 5.\overline{140}^2.$$

Le sujet que je viens de traiter dans cette Étude comporte beaucoup d'autres développements, mais je dois me borner pour le moment à en avoir indiqué les traits caractéristiques.

Nota. *Page* 424, *ligne* 9, *au lieu de* « les deux solutions », *lisez* « deux des quatre solutions. »

SUR LE SYSTÈME DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES $x^2 - Ay^2 = u^2$, $x^2 + Ay^2 = v^2$;

Par M. Édouard LUCAS.

On a tout d'abord le théorème suivant :

Pour que le système indéterminé

(1) $$x^2 - Ay^2 = u^2, \quad x^2 + Ay^2 = v^2$$

soit vérifié par une série indéfinie de valeurs entières des inconnues x, y, u, v, il faut et il suffit que A appartienne à la forme

$$(2) \qquad A = \lambda_0\mu_0(\lambda_0 + \mu_0)(\lambda_0 - \mu_0),$$

que l'on peut supposer débarrassée de ses facteurs quadratiques.

En effet, en ajoutant membre à membre les deux équations du système (1), on a

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 + \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = x^2,$$

et l'on doit poser

$$\frac{u+v}{2} = \lambda_0^2 - \mu_0^2, \quad \frac{u-v}{2} = 2\lambda_0\mu_0, \quad x = \lambda_0^2 + \mu_0^2,$$

λ_0 et μ_0 désignant deux nombres quelconques, premiers entre eux, l'un pair et l'autre impair ; on en déduit la solution initiale

$$(3) \qquad \begin{cases} x_0 = \lambda_0^2 - \mu_0^2, \\ u_0 = \lambda_0^2 - \mu_0^2 + 2\lambda_0\mu_0, \\ v_0 = \lambda_0^2 - \mu_0^2 - 2\lambda_0\mu_0, \end{cases}$$

et, par suite,

$$A = \lambda_0\mu_0(\lambda_0 + \mu_0)(\lambda_0 - \mu_0), \quad y_0 = 2.$$

Ainsi le théorème est démontré ; on sait d'ailleurs que le nombre A est dit *congruent*, et représente l'aire d'un triangle rectangle, dont les côtés entiers ont pour longueurs

$$\lambda_0^2 - \mu_0^2, \quad 2\lambda_0\mu_0, \quad \lambda_0^2 + \mu_0^2 \; (*).$$

Notre but est d'indiquer comment on peut parvenir à résoudre complétement le système proposé, pour les va-

(*) *Recherches sur les ouvrages de Léonard de Pise*, Ch. II.

leurs de A données par la formule (2). Nous observerons, à ce sujet, qu'il est nécessaire, pour traiter généralement la question, de connaître la décomposition de A en ses facteurs premiers. On sait, en effet, que Lagrange a ramené la résolution des équations quadratiques indéterminées à des équations de la forme

$$x^2 - y^2 = Az^2,$$

et que cette résolution est liée à la connaissance des facteurs premiers de A. Inversement, nous montrerons ultérieurement que la décomposition d'un nombre donné A, en ses facteurs premiers, se trouve notablement simplifiée par l'essai direct de la résolution de l'équation

$$x^2 - y^2 = A,$$

au moyen de la considération des résidus quadratiques. Nous ferons voir que, par cette méthode, imaginée par Aurifeuille, et que nous avons perfectionnée, il est possible d'arriver plus rapidement à la décomposition de nombres de seize et de dix-huit chiffres qu'à celle des nombres de huit et de dix chiffres, par l'application des anciennes méthodes.

Par conséquent, on ne doit voir dans la présente Note que l'indication de la marche à suivre, pour résoudre complétement, pour toutes les valeurs numériques de A, décomposé en ses facteurs premiers, le système des équations proposées. On tire de la seconde des équations (1)

$$(v + x)(v - x) = Ay^2;$$

donc, en désignant par α et β deux nombres entiers dont le produit égale A, et par e et f deux indéterminées, on aura

$$v + x = 2\alpha e^2, \quad v - x = 2\beta f^2, \quad y = 2ef,$$

et, par suite,

$$x = \alpha e^2 - \beta f^2, \quad v = \alpha e^2 + \beta f^2, \quad y = 2ef.$$

En portant ces valeurs dans la première des équations proposées, on arrive à la condition

$$(\alpha e^2 - 3\beta f^2)^2 - u^2 = 8\beta^2 f^4.$$

Désignons par β_1 et β_2 deux nombres positifs ou négatifs, dont le produit est égal à β, par g et h deux nouvelles indéterminées, nous tirerons de la condition précédente

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha e^2 - 3\beta f^2 + u &= \pm 2\beta_1^2 g^4, \\ \alpha e^2 - 3\beta f^2 - u &= \pm 4\beta_2^2 h^4, \\ f &= gh. \end{aligned} \right.$$

Premier cas. — Si l'on prend, en même temps, les signes supérieurs dans les équations (4), on en déduit, par addition, après avoir remplacé f par gh et β par $\beta_1\beta_2$,

$$(\beta_1 g^2 + \beta_2 h^2)(\beta_1 g^2 + 2\beta_2 h^2) = \alpha e^2;$$

désignons par α_1 et α_2 deux nombres entiers dont le produit égale α, et par p et q deux nouvelles indéterminées; nous poserons

$$\begin{aligned} \beta_1 g^2 + \beta_2 h^2 &= \alpha_1 p^2, \\ \beta_1 g^2 + 2\beta_2 h^2 &= \alpha_2 q^2, \\ e &= pq; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(5) \qquad \alpha_1 p^2 - \beta_2 h^2 = \beta_1 g^2, \quad \alpha_1 p^2 + \beta_2 h^2 = \alpha_2 q^2.$$

Ce système est vérifié pour des valeurs égales des indéterminées g, h, p, q, lorsque l'on suppose

$$\alpha_1 = \lambda_0, \quad \beta_2 = \mu_0, \quad \beta_1 = \lambda_0 - \mu_0, \quad \alpha_2 = \lambda_0 + \mu_0;$$

il est facile de déduire de ces valeurs la solution initiale

(3). En général, une solution quelconque du système (5) donnera une solution du système proposé, et, par suite, une série indéfinie, comme nous allons le montrer.

Si l'on fait, dans le système (5),

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \lambda_0\mu_0(\lambda_0^2 - \mu_0^2),$$

le système (5) coïncide avec le système proposé ; par conséquent, d'une première solution (x, y, u, v) du système (1), on déduit une série indéfinie de solutions nouvelles (X, Y, U, V) par les formules

$$(6) \quad \begin{cases} X = u^2x^2 - \lambda_0\mu_0(\lambda_0^2 - \mu_0^2)v^2y^2, & Y = 2xyuv, \\ V = u^2x^2 + \lambda_0\mu_0(\lambda_0^2 - \mu_0^2)v^2y^2, & U = u^4 - 2x^4. \end{cases}$$

En désignant par $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ les valeurs successives de x, on voit que ces valeurs sont des polynômes en λ de degré $2, 8, 32, \ldots, 2^{2n+1}$.

Second cas. — Le système (4) donne de même, avec les signes inférieurs,

$$\beta_1 g^2 - \beta_2 h^2 = \alpha_1 p^2,$$
$$2\beta_2 h^2 - \beta_1 g^2 = \alpha_2 q^2,$$
$$c = pq,$$

et, par suite,

$$\beta_2 h^2 - \alpha_1 p^2 = \alpha_2 q^2, \quad \beta_2 h^2 + \alpha_1 p^2 = \beta_1 g^2.$$

On arrive ainsi à un système analogue au système (5). Par conséquent, on décomposera A en un produit de quatre facteurs, de toutes les manières possibles, et l'on aura un certain nombre d'équations de la forme (5) ; plusieurs d'entre elles seront reconnues impossibles, par non-congruence ; d'autres seront possibles. Soit

$$Mp^2 - Nh^2 = Pg^2, \quad Mp^2 + Nh^2 = Qq^2,$$

un tel système admettant la solution (g_0, h_0, p_0, q_0) ; on

posera

$$Mp_0^2 = \lambda, \quad Nh_0^2 = \mu, \quad Pg_0^2 = \lambda - \mu, \quad Qq_0^2 = \lambda + \mu,$$

et l'on aura

$$\lambda\mu(\lambda + \mu)(\lambda - \mu) = Az^2.$$

Il nous reste donc à considérer le système général

$$(7) \qquad \begin{cases} \lambda p^2 - \mu h^2 = \rho g^2, \\ \lambda p^2 + \mu h^2 = \sigma q^2, \end{cases}$$

dans lequel nous désignons, pour abréger, $\lambda - \mu$ par ρ et $\lambda + \mu$ par σ. On résout la première équation du système (7), mise sous la forme

$$p^2 - \left(\frac{\rho g + \mu h}{\rho + \mu}\right)^2 = \rho\mu\left(\frac{h - g}{\rho + \mu}\right)^2,$$

par les formules

$$p = \mu_1 r^2 + \rho_1 s^2,$$
$$h = \mu_1 r^2 - \rho_1 s^2 + 2\rho rs,$$
$$g = \mu_1 r^2 - \rho_1 s^2 - 2\mu rs,$$

dans lesquelles $\rho_1\mu_1 = \rho\mu$. En portant ces valeurs dans la seconde des équations (7), on obtient la condition

$$\lambda(\mu_1 r^2 + \rho_1 s^2)^2 + \mu(\mu_1 r^2 - \rho_1 s^2 + 2\rho rs)^2 = \sigma q^2,$$

ou bien

$$\sigma(\mu_1 r^2 + \rho_1 s^2)^2 + 4\rho\mu rs(\mu_1 r^2 - \rho_1 s^2) + 4\rho\mu r^2 s^2(\rho - \mu) = \sigma q^2,$$

ou, en posant $s = \sigma s'$,

$$(\mu_1 r^2 + 2\rho\mu rs' - \rho_1\sigma^2 s'^2)^2 + 8\lambda^2\mu\rho r^2 s'^2 = q^2.$$

On déduit de l'équation précédente

$$q \pm (\mu_1 r^2 + 2\rho\mu rs' - \rho_1\sigma^2 s'^2) = 2\rho_2 w^2,$$
$$q \mp (\mu_1 r^2 + 2\rho\mu rs' - \rho_1\sigma^2 s'^2) = 4\mu_2\lambda^2 t^2,$$
$$rs' = wt,$$

en désignant par ρ_2 et μ_2 deux nombres tels que

$$\rho_2 \mu_2 = \rho\mu,$$

et par w et t deux nouvelles indéterminées ; on en tire

$$(8)\qquad \mu_1 r^2 + 2\rho\mu r s' - \rho_1 \sigma^2 s'^2 = \pm (\rho_2 w^2 - 2\mu_2 \lambda^2 t^2).$$

Posons $w = mr$, $s' = mt$, il vient, en prenant le signe $+$,

$$m^2(\rho_2 r^2 + \rho_1 \sigma^2 t^2) - 2\rho\mu rtm = \mu_1 r^2 + 2\mu_2 \lambda^2 t^2;$$

pour que la valeur de m soit rationnelle, on doit faire

$$\rho_2 \mu_1 r^4 + 3\lambda\mu\rho\sigma r^2 t^2 + 2\rho_1 \mu_2 \sigma^2 \lambda^2 t^4 = \mathrm{H}^2,$$

et l'on a

$$m = \frac{\rho\mu rt \pm \mathrm{H}}{\rho_2 r^2 + \rho_1 \sigma^2 t^2}.$$

On peut écrire l'équation de condition sous la forme

$$(\rho_2 \mu_1 r^2 + \mathrm{A} t^2)(\rho_2 \mu_1 r^2 + 2\mathrm{A} t^2) = \rho_2 \mu_1 \mathrm{H}^2,$$

et la séparer, de diverses manières, en deux autres formant un système analogue au système (5) ; on traitera ces différents systèmes de la même façon que précédemment. En faisant plus particulièrement $\rho_2 = \mu_1 = 1$, on a, en désignant par a et b deux nouvelles indéterminées,

$$r^2 + \mathrm{A} t^2 = a^2,$$
$$r^2 + 2\mathrm{A} t^2 = b^2,$$
$$ab = \mathrm{H}.$$

Par suite, on obtient

$$a^2 - \mathrm{A} t^2 = r^2, \quad a^2 + \mathrm{A} t^2 = b^2;$$

c'est un système identique au système proposé. Par conséquent, *d'une solution x, y, u, v du système*

$$x^2 - \mathrm{A} y^2 = u^2, \quad x^2 + \mathrm{A} y^2 = v^2,$$

on déduit deux nouvelles solutions X, Y, U, V, *par les formules*

$$(9)\quad \begin{cases} \begin{cases} m = \mu\rho u y \pm v x, \\ n = u^2 + \mu\rho\sigma^2 y^2; \end{cases} \\ \begin{cases} p = n^2 u^2 + \mu\rho\sigma^2 m^2 y^2, \\ q = m^2 u^2 + 2\mu\rho\lambda^2 n^2 y^2, \\ g = n^2 u^2 - \mu\rho\sigma^2 m^2 y^2 - 2\rho\sigma m n u y, \\ h = n^2 u^2 - \mu\rho\sigma^2 m^2 y^2 + 2\rho\sigma m n u y; \end{cases} \\ \begin{cases} \mathrm{X} = \lambda\sigma p^2 q^2 - \mu\rho g^2 h^2, \quad \mathrm{Y} = 2ghpq, \\ \mathrm{V} = \lambda\sigma p^2 q^2 + \mu\rho g^2 h^2, \quad \mathrm{U} = \rho^2 g^4 - 2\mu^2 h^4. \end{cases} \end{cases}$$

Ces formules donnent des solutions distinctes de celles qui sont fournies par les équations (6); d'ailleurs le second cas conduirait aux mêmes formules.

Pour certaines valeurs de A, les formules (6) et (9) résolvent complétement le système (1), et par exemple pour $A = 6$. On traite ainsi complétement ce problème de Fermat :

Trouver tous les triangles rectangles dont l'aire soit six fois celle d'un carré.

Ces formules résolvent aussi complétement le système (7), pour le problème de Beha-Eddin, que l'on ramène au système

$$8x^2 - y^2 = 7u^2, \quad 8x^2 + y^2 = 9v^2,$$

ainsi que nous l'avons montré précédemment (*).

Remarque. — En prenant le signe — dans la formule (8), on arrive à des systèmes analogues au système (5).

(*) *Voir* tome XV, page 359.

NOTE SUR QUELQUES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU TROISIÈME DEGRÉ ;

PAR M. S. REALIS.

1. On sait que, si une solution de l'équation

$$x^3 + y^3 = 9z^3$$

est donnée par les valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, on aura de nouvelles valeurs de x, y, z au moyen des formules

$$(1) \quad \begin{cases} x = \alpha(\alpha^3 + 2\beta^3), \\ y = -\beta(\beta^3 + 2\alpha^3), \\ z = \gamma(\alpha^3 - \beta^3). \end{cases}$$

Cette seconde solution en donnera une troisième; de celle-ci en résultera une quatrième, et ainsi de suite, à l'infini.

En partant de la solution évidente $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, on peut donc assigner une suite indéfinie de systèmes de valeurs entières de x, y, z vérifiant l'équation proposée. Cependant rien n'indique que l'équation soit complétement résolue de la sorte, et notamment, comme le remarque M. E. Lucas, il ne résulte de là aucun système comportant une valeur paire de z. De telles solutions existent pourtant, puisqu'on peut faire, par exemple, $x = 919$, $y = -271$, $z = 438$ (*voir* les *Nouvelles Annales*, année 1876, p. 83).

Or, la remarque que nous voulons placer ici, c'est que, dès que l'on a $\alpha^3 + \beta^3 = 9\gamma^3$, on satisfera également à l'équation considérée, en posant

$$(2) \quad \begin{cases} x = 2\alpha^2 - 4\alpha\beta + 9\beta\gamma - 9\gamma^2, \\ y = 2\beta^2 - \beta\alpha + 9\alpha\gamma - 18\gamma^2, \\ z = 2\alpha^2 - 4\alpha\gamma - \gamma\beta + \beta^2. \end{cases}$$

Nous ne donnons pas ici la déduction de ces formules, dont l'exactitude peut être facilement vérifiée *à posteriori*.

D'après cela, ayant obtenu, au moyen de la solution initiale et des formules (1), les valeurs

$$\alpha = 17, \quad \beta = -20, \quad \gamma = -7,$$

nous obtiendrons de suite, par les expressions (2), les nouvelles valeurs

$$x = 2757, \quad y = -813, \quad z = 1314,$$

ou plutôt, en ôtant le facteur commun 3,

$$x = 919, \quad y = -271, \quad z = 438.$$

C'est la solution mentionnée ci-dessus.

En général, on n'aura qu'à s'appuyer sur un cas particulier, où β soit un nombre pair et γ un nombre impair, pour être assuré que les formules (2) fourniront des valeurs impaires pour x et y, et une valeur paire pour z. Ces valeurs, il est superflu de le dire, devront être débarrassées des facteurs impairs qui pourraient leur être communs.

2. Considérons maintenant l'équation

$$x^3 + y^3 = 7z^3.$$

Une solution connue $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$ en amène une autre à l'aide des mêmes formules (1) qui servent pour l'équation considérée précédemment. Il arrive ici de même, comme le remarque encore M. Lucas, que la résolution n'est pas complète; en effet, en partant des valeurs initiales $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, l'application des formules (1) ne conduit à aucun système de valeurs où z soit un nombre pair.

Cela nous fournit l'occasion de proposer les nouvelles formules

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \quad 2\alpha^2 + 4\alpha\beta - 7\beta\gamma - 7\gamma^2, \\ y = \quad 2\beta^2 + \quad \beta\alpha - 7\alpha\gamma + 14\gamma^2, \\ z = -2\alpha^2 + 4\alpha\gamma + \quad \gamma\beta + \beta^2, \end{cases}$$

par lesquelles on résout également l'équation donnée, α, β, γ constituant la solution $\alpha^3 + \beta^3 = 7\gamma^3$. Ces relations, faciles à vérifier, remplissent manifestement le but de conduire à une valeur paire de z, et à des valeurs impaires de x et y, lorsqu'on prend α et γ impairs, et β pair.

Exemple. — Au moyen de la solution initiale, les formules (1) donnent $\alpha = 15$, $\beta = 12$, $\gamma = 9$: avec ces valeurs, les formules (3) donnent à leur tour

$$x = -153, \quad y = 657, \quad z = 342,$$

c'est-à-dire, en supprimant le facteur commun 9,

$$x = -17, \quad y = 73, \quad z = 38;$$

solution citée par M. Lucas.

3. Maintenant, a-t-on, dans ce qui précède, la solution complète des équations considérées? Il se peut qu'il en soit ainsi, mais nous n'avons pas de preuve à en donner; il convient d'ajouter, d'ailleurs, qu'il existe d'autres formules de solution pour ces équations, en outre des systèmes (1), (2), (3). A la rigueur, on n'a pas même le droit d'affirmer d'avance que les procédés indiqués fournissent un nombre indéfini de solutions distinctes. Il pourrait être objecté, en effet, que, une fois arrivés à certaines valeurs de x, y, z, la suppression des facteurs communs à ces valeurs ramènera les solutions précédentes, sans qu'il soit possible d'aller plus loin. Mais il

nous suffira d'avoir mentionné ces questions, auxquelles il est peut-être assez difficile de répondre.

Ajoutons, en terminant, que tout ce qui précède peut être généralisé, en l'appliquant aux équations de la forme

$$ax^3 + by^3 = cz^3,$$

et à d'autres équations indéterminées du troisième degré, toutes les fois qu'elles admettent des solutions entières. Nous pourrons revenir sur ce sujet.

FOYERS DES SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. A. HAILLECOURT,
Agrégé de l'Université, Inspecteur honoraire d'Académie.

LEMME. — *Pour que le polynôme*

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d$$

soit carré parfait, les conditions nécessaires et suffisantes sont

$$ab = b'b'', \quad a'b' = b''b, \quad a''b'' = bb', \quad bc = b'c' = b''c'',$$
$$3bb'b''d = bc.b'c' + b'c'.b''c'' + b''c''.bc.$$

Pour que (x, y, z) soit foyer de la surface

$$AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY + 2CX + 2C'Y + 2C''Z + D = 0,$$

il faut que

$$(A - s)X^2 + (A' - s)Y^2 + (A'' - s)Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY + 2(C + sx)X + 2(C' + sy)Y + 2(C'' + sz)Z + D - s(x^2 + y^2 + z^2)$$

soit carré parfait.

Le lemme donne donc pour équations de condition

$$(1)\quad (A - s)B = B'B'',\quad (A' - s)B' = B''B,\quad (A'' - s)B'' = BB'.$$

$$(2)\quad B(C + sx) = B'(C' + sy) = B''(C'' + sz).$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &3BB'B''s(x^2 + y^2 + z^2)\\ &\quad + BB'(C + sx)(C' + sy)\\ &\quad + B'B''(C' + sy)(C'' + sz)\\ &\quad + B''B(C'' + sz)(C + sx) = 3BB'B''D. \end{aligned}\right.$$

Comme de (1) on tire

$$(4)\quad A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''} = s,$$

on voit que la surface est de révolution et que la valeur de s est la racine double de l'*équation en* s. Désignons-la par s_0, et par s_1 la racine simple. De là

$$(\sigma)\quad s_1 = A + A' + A'' - 2s_0 = \frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''} + s_0.$$

Premier cas. — *Surfaces douées d'un centre.*

En transportant l'origine au centre (α, β, γ), ce qui donne pour terme tout connu

$$D_1 = D + C\alpha + C'\beta + C''\gamma,$$

les équations (2) et (3) se réduisent respectivement à

$$(5)\quad Bx_1 = B'y_1 = B''z_1,$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &3BB'B''s_0(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)\\ &\quad + s_0^2(B'B''y_1z_1 + B''Bz_1x_1 + BB'x_1y_1) = 3BB'B''D_1, \end{aligned}\right.$$

d'où

$$Bx_1 = B'y_1 = B''z_1 = \pm\sqrt{\frac{BB'B''D_1}{s_0\left(s_0 + \dfrac{B'B''}{B} + \dfrac{B''B}{B'} + \dfrac{BB'}{B''}\right)}}.$$

En ayant égard à l'équation (σ), on a donc, pour les

équations du foyer,

$$\text{(F)}\quad B(x-\alpha) = B'(y-\beta) = B''(z-\gamma) = \pm\sqrt{\frac{BB'B''D_1}{s_1 s_0}}.$$

$BB'B''$ est de même signe que

$$\frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''} = s_1 - s_0;$$

la quantité sous le radical a donc le signe de

$$\frac{(s_1 - s_0)D_1}{s_1 s_0}.$$

Cette remarque suffit pour prouver que :

1° L'hyperboloïde de révolution à une nappe n'a pas de foyer;

2° L'hyperboloïde de révolution à deux nappes a deux foyers, situés sur l'axe transverse;

3° L'ellipsoïde de révolution autour de son grand axe a deux foyers, situés sur cet axe.

Second cas. — *Paraboloïde elliptique.*

En introduisant une inconnue auxiliaire t, de (2) on tire

$$(7)\qquad \frac{x + \frac{C}{s_0}}{\left(\frac{1}{B}\right)} = \frac{y + \frac{C'}{s_0}}{\left(\frac{1}{B'}\right)} = \frac{z + \frac{C''}{s_0}}{\left(\frac{1}{B''}\right)} = t.$$

Éliminons x, y, z entre (7) et (3). Le coefficient de t^2 est

$$3BB'B''s_0\left(\frac{1}{B^2} + \frac{1}{B'^2} + \frac{1}{B''^2}\right) + 3s_0^2$$
$$= 3s_0\left(\frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right) = 3s_0 s_1.$$

Mais ici $s_1 = 0$. L'équation en t tombe donc au premier

degré. Elle donne

$$t = \frac{1}{2s_0} \frac{C^2 + C'^2 + C''^2 - Ds_0}{\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}},$$

d'où, pour les équations du foyer,

$$(F) \quad \left\{ \begin{aligned} & B(s_0 x + C) = B'(s_0 y + C') = B''(s_0 z + C'') \\ & \qquad = \frac{1}{2} \frac{C^2 + C'^2 + C''^2 - Ds_0}{\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}}. \end{aligned} \right.$$

Si l'on remplace D par $D + sr^2$, c'est qu'au lieu d'un foyer on cherche une *sphère focale* de rayon r. Une discussion, qui ne présente pas de difficulté sérieuse, montre que :

1° Tout parallèle d'un hyperboloïde de révolution à une nappe est la courbe de contact d'une sphère focale avec la surface.

2° Tout point pris sur l'axe transverse de l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, mais non situé entre les foyers, est le centre d'une sphère focale enveloppée par la surface. Il en est de même de tout point situé entre les foyers d'un ellipsoïde de révolution autour de son grand axe. Pour le paraboloïde elliptique, il en est encore de même de tout point de l'axe situé au delà du foyer par rapport au sommet.

3° Si l'ellipsoïde est de révolution autour de son petit axe, tout point de cet axe est le centre d'une sphère enveloppant la surface, et telle que la puissance, par rapport à la sphère d'un point quelconque de l'ellipsoïde, est, en grandeur absolue, le carré d'une fonction linéaire de ses coordonnées. C'est ce qu'on pourrait appeler *une sphère focale à puissance négative*.

Scolie. — Pour les courbes du second ordre, la même

méthode conduit, simplement aussi, à des expressions qui fournissent les coordonnées des foyers ; mais, dans ces expressions, il y a des radicaux dont le signe doit être déterminé dans chaque cas particulier.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1878).

Composition de Mathématiques.

On donne une droite D dont l'équation, par rapport à deux axes rectangulaires Ox et Oy, est

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1.$$

On considère les différentes coniques qui, ayant pour axes Ox et Oy, sont normales à la droite D. Chacune d'elles rencontre cette droite en deux points; en ces points on mène les tangentes à la conique.

Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces tangentes. Démontrer :

1° Que ce lieu est une parabole;

2° Que la distance du foyer de cette parabole à son sommet est le quart de la distance du point O à la droite D.

On construira géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

Géométrie descriptive.

On donne un losange ABCD dont la diagonale AOC est égale à 20 centimètres, et la diagonale BOD à 12 centimètres. Le plan du losange est horizontal et situé à

3 centimètres au-dessus du plan horizontal de projection. Le côté AB est situé dans le plan vertical de projection.

Le losange, en tournant autour de la diagonale AC, engendre un double cône. Le cercle circonscrit au triangle COD, en tournant autour de AB, engendre un tore.

On demande de représenter le double cône, supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps située au-dessous du plan horizontal de projection, ainsi que la partie comprise dans le tore.

On indiquera à l'encre rouge les constructions relatives à la recherche d'un point quelconque de la ligne commune au tore et à l'un des cônes et de la tangente à cette ligne.

Composition de Calcul numérique.

Étant donnés, dans un triangle ABC, deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 35960,18,$$
$$b = 98712,97,$$
$$C = 35^\circ\, 18'\, 57'',17,$$

trouver les deux angles A et B, le troisième côté c et la surface S.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. D. Marchand, Curé de Notre-Dame, à Pontoise.

« Permettez à un simple arithméticien de vous adres-

ser la réponse à une question posée par M. Realis, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (livraison du mois d'août 1878).

» La question est ainsi posée : *Le carré de tout nombre impair, divisible par* 3, *est la différence de deux nombres triangulaires premiers avec* 3.

» Cette proposition est le corollaire d'un théorème plus général, que j'énonce ainsi :

» Deux nombres consécutifs étant donnés, le premier pair ($2n$), le second impair ($2n+1$); si l'on fait, d'une part, le triangle $\frac{n(n+1)}{2}$, de la moitié du nombre pair, et, d'autre part, le carré du nombre impair, on obtient deux produits dont la somme est égale à un nombre triangulaire (*).

» Par ce moyen, on a deux nombres triangulaires dont la différence est le carré d'un nombre impair donné.

» Sur ce qui précède il y a des remarques à faire :

» 1° Le second nombre triangulaire $\frac{(3n+1)(3n+2)}{2}$ est évidemment premier avec 3, quel que soit le nombre impair considéré ($2n+1$).

» 2° La différence entre les bases triangulaires $3n+1$ et n étant $2n+1$, il en résulte que, si le nombre impair $2n+1$ est divisible par 3, la base n est nécessairement égale à un multiple de 3, $+1$; par conséquent, dans ce cas, le premier nombre triangulaire est, comme le second, premier avec 3.

» Telle est, monsieur le Rédacteur, ma réponse à la question de M. Realis. »

(*) $\frac{n(n+1)}{2}+(2n+1)^2 = \frac{(3n+1)(3n+2)}{2}$, identiquement.

M. Moret-Blanc observe qu'on a identiquement

$$9n^2 = \frac{(3n^2+1)(3n^2+2)}{2} - \frac{(3n^2-2)(3n^2-1)}{2},$$

ce qui démontre le théorème de M. Realis.

La restriction que le carré soit impair est inutile; l'identité précédente démontre que :

Tout carré divisible par 3 *est la différence de deux nombres triangulaires premiers avec* 3.

MM. Lez, Pisani et Sondat nous ont adressé des solutions de la question 1255, résolue (n° de septembre, p. 340).

La question 1221 a été résolue par M. S. K., à Vienne.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1194

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 144);

PAR A.-J.-J. MEYL,
Ancien capitaine d'artillerie, à La Haye.

Une pile de boulets à base triangulaire ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient sur le côté de la base 1, 2 *ou* 48.

Soit n le nombre de boulets d'un côté de la base, l'équation à résoudre sera $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = Q^2$. On supposera :

1° Que n est un nombre pair $2m$. L'équation devient

$\frac{2m(2m+1)(2m+2)}{6} = Q^2$, et, en écartant le facteur carré 4 du premier membre,

$$\frac{m(2m+1)(m+1)}{6} = Q^2.$$

Or, dans la solution de la question 1180 (2e série, t. XVI, p. 429), M. E. Lucas a démontré que les seules valeurs en nombres entiers pour m, dans cette dernière équation, sont $m = 1$, $m = 24$. Par conséquent, on a $n = 2$, $n = 48$.

2° Que n est un nombre impair. Il y a trois cas à considérer selon que n, $n+1$ ou $n+2$ est divisible par 3. Pour plus de facilité, on remplacera n, dans ces trois cas respectivement, par $6m+3$, $6m-1$ et $6m+1$.

Soit n divisible par 3, d'où $n = 6m+3$. L'équation à résoudre est

$$(6m+3)(6m+4)(6m+5) = 6Q^2,$$

ou

$$(2m+1)(3m+2)(6m+5) = Q^2.$$

Les facteurs du premier membre étant premiers entre eux, on doit avoir

$$2m+1 = x^2, \quad 3m+2 = y^2, \quad 6m+5 = z^2;$$

des deux premières équations on tire

$$3x^2+1 = 2y^2,$$

équation impossible pour

$$y \equiv (-1, 0, +1) \pmod{3}.$$

Si $n+1$ est divisible par 3, on a $n = 6m-1$. L'équation devient

$$(6m-1)6m(6m+1) = 6Q^2,$$

et, comme plus haut,

$$6m - 1 = x^2, \quad 6m = 6y^2, \quad 6m + 1 = z^2,$$

les deux premières donnent

$$x^2 + 1 = 6y^2,$$

impossible pour

$$x \equiv (-1, 0, +1) \pmod{3}.$$

Soit $n + 2$, divisible par 3, ou $n = 6m + 1$, on a l'équation

$$(6m + 1)(6m + 2)(6m + 3) = 6Q^2;$$

par conséquent,

$$6m + 1 = x^2, \quad 6m + 2 = 2y^2, \quad 6m + 3 = 3z^2;$$

d'où

$$(1) \qquad x^2 + 1 = 2y^2, \quad 2y^2 + 1 = 3z^2, \quad x^2 + 2 = 3z^2;$$

il s'ensuit

$$(2) \qquad 3z^2 = 4y^2 - x^2 = (2y + x)(2y - x).$$

Comme x, y et z sont premiers entre eux, les facteurs $2y + x$ et $2y - x$, dont la somme est $4y$ et la différence $2x$, ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que 2 ; mais, x étant impair, ce diviseur n'existe pas; donc $2y + x$ et $2y - x$ sont premiers entre eux. On peut donc poser

$$z = pq, \quad 2y + x = 3p^2, \quad 2y - x = q^2.$$

Les valeurs de x, y et z, obtenues de ces équations et substituées dans une des équations (1), donnent l'équation

$$9p^4 - 18 . p^2q^2 - q^4 + 8 = 0;$$

en la résolvant par rapport à p^2, on a

$$p^2 = q^2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2(q^4-1)} = q^2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{2(q^2+1)(q+1)(q-1)}.$$

Les facteurs sous le radical ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que 2, puisque q, comme diviseur de l'impair z, est aussi impair. On peut donc mettre ce radical sous la forme

$$\sqrt{16 \times \frac{q^2+1}{2} \times \frac{q^2-1}{4}},$$

dont les facteurs $\frac{q^2+1}{2}$ et $\frac{q^2-1}{4}$ sont entiers et premiers entre eux.

Pour que p^2 soit rationnel, il faut que l'expression sous le radical soit un carré parfait, ou qu'elle s'annule; le premier cas est impossible, puisque q^2-1 n'est jamais un carré; le deuxième n'est possible que pour $q^2=1$. Par là, on a successivement $p^2=q^2=1$, $x=y=z=1$, $m=0$ et enfin $n=1$. Ainsi on ne peut trouver pour n que les valeurs 1, 2 et 48. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Note du rédacteur. — Les facteurs $2y+x$, $2y-x$ du second membre de l'équation (2)

$$3z^2 = (2y+x)(2y-x)$$

étant premiers entre eux, on a

$$z = pq, \quad 2y+x = 3p^2, \quad 2y-x = q^2,$$

ou

$$z = pq, \quad 2y+x = p^2, \quad 2y-x = 3q^2;$$

mais cette seconde hypothèse conduit au même résultat que la première.

La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 1251

(voir 2e série, t. XVI, p. 384);

PAR M. S. REALIS.

L'expression $6xy(3x^4+y^4)$, dans laquelle x et y sont des entiers différents de zéro, ne peut jamais représenter un cube, ni le quadruple d'un cube.

Soit, s'il est possible,

$$6xy(3x^4+y^4)=2^m z^3,$$

x, y, z étant des entiers différents de zéro, et m étant égal à zéro ou à 2.

On a, par identité,

$$[6xy(3x^4+y^4)]^2=X^3+Y^3,$$

où

$$X=3x^4+6x^2y^2-y^4,$$
$$Y=-3x^4+6x^2y^2+y^4.$$

Il s'ensuivrait donc

$$(2^m z^3)^2=X^3+Y^3,$$

c'est-à-dire

$$2^{2m}(z^2)^3=X^3+Y^3,$$

équation impossible, pour $m=0$ ou $m=2$, quels que soient les signes des nombres entiers X et Y (*). (EULER, *Analyse indéterminée*, § 243 et § 247.)

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc et Lucas.

(*) *L'équation $x^3+y^3=2^m z^3$ est impossible en nombres entiers pour toute valeur de m* (LEGENDRE, *Théorie des nombres*, éd. de 1830, t. II, p. 9). Par conséquent, d'après l'identité

$$[6xy(3x^4+y^4)]^2=X^3+Y^3,$$

l'équation $6xy(3x^4+y^4)=2^m z^3$ est de même, impossible pour toute valeur entière de m. (G.)

Question 1261

(voir 2e série, t. XVII, p. 249);

PAR M. MICHEL.

On prend un point A *sur un diamètre fixe d'une circonférence donnée; soit* ABC *le triangle isoscèle d'aire maximum, tel que* B, C *soient des points de la circonférence donnée, et que* BC *soit perpendiculaire sur le diamètre passant par* A. *Trouver l'enveloppe de la droite* AB *quand* A *se meut sur le diamètre fixe.*

(LEMOINE.)

Soient O le centre de la circonférence donnée; D le point d'intersection du diamètre fixe et de la base BC du triangle ABC (*).

En posant $OD = x$, $AO = a$, $OB = r$, la surface du triangle aura pour expression

$$(a + x)\sqrt{r^2 - x^2}.$$

On trouve facilement que cette surface est maximum, quand

$$r^2 - x^2 = x(a + x),$$

c'est-à-dire quand $\overline{BD}^2 = DO \times DA$. Il en résulte immédiatement que l'angle BOD = ABD (**).

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Cela étant, décrivez du point B comme centre, avec BO pour rayon, une circonférence qui rencontrera la droite AB et son prolongement en des points G, H, et tirez les deux droites rectangulaires OG, OH. Ces droites resteront invariables dans le mouvement supposé au point A, parce que les angles GOA, HOD, qu'elles forment, au point O, avec le diamètre fixe OA, de différents côtés de ce diamètre, sont constamment égaux, chacun, à 45 degrés. En effet, l'égalité BOD = ABD

Actuellement, abaissons du point O une perpendiculaire OE sur AB ; soient $OE = p$, et l'angle $EOD = \alpha$.

En prenant pour axes de coordonnées le diamètre fixe donné et le diamètre perpendiculaire, l'équation de la droite AB est

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

On a d'ailleurs

$$p = r\cos BOE = -r\cos 2\alpha,$$

et l'équation de AB devient

$$(1) \qquad x\cos\alpha + y\sin\alpha = -r\cos 2\alpha;$$

sa dérivée par rapport à α est

$$(2) \qquad -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 2r\sin 2\alpha.$$

L'élimination de α entre les équations (1) et (2), donnera l'équation du lieu cherché.

---

donne

$$ABO + BAO = \frac{\pi}{2} - BAO,$$

$$ABO = \frac{\pi}{2} - 2BAO = \frac{\pi}{2} - 2GAO.$$

Mais l'angle ABO, ou GBO, étant l'angle au sommet du triangle isoscèle BGO, on a

$$ABO = \pi - 2BGO;$$

donc

$$\frac{\pi}{2} - 2GAO = \pi - 2BGO;$$

d'où

$$BGO = \frac{\pi}{4} + GAO = GOA + GAO,$$

$$GOA = \frac{\pi}{4} = 45^\circ, \quad \text{et} \quad HOD = 45^\circ.$$

Par conséquent, la question proposée revient à trouver l'enveloppe d'une droite GH, de longueur constante, 2.OB, dont les extrémités G et H glissent sur deux droites fixes rectangulaires OG, OH. Ce qui est une question dont la solution est bien connue. (G.)

De ces équations on tire

$$(x+y)^2 = r^2(1-\sin 2\alpha)^3,$$
$$(x-y)^2 = r^2(1+\sin 2\alpha)^3,$$

et par suite

$$(3) \qquad \sqrt[3]{(x+y)^2} + \sqrt[3]{(x-y)^2} = 2\sqrt[3]{r^2} \ (^*).$$

Note. — Autre solution de M. Barbarin.

Question 1265

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 240);

Par M. MORET-BLANC.

Le centre d'un cercle O *de rayon constant se déplace dans son plan sur la circonférence d'un cercle fixe* O'. *Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe* P *par rapport au cercle* O. (Laisant.)

Solution analytique. — Je prends le centre du cercle fixe pour origine des coordonnées rectangulaires, et je fais passer l'axe $O'x$ par le point P. Soient a' et a les rayons du cercle fixe et du cercle mobile, et α l'abscisse du point P.

Les coordonnées du point O étant $a'\cos\theta$, $a'\sin\theta$, l'équation du cercle O sera

$$(x - a'\cos\theta)^2 + (y - a'\sin\theta)^2 = a^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 - 2a'x\cos\theta - 2a'y\sin\theta + a'^2 - a^2 = 0,$$

et celle de la polaire du point P par rapport à ce cercle,

$$\alpha x - a'(x+\alpha)\cos\theta - a'y\sin\theta + a'^2 - a^2 = 0,$$

(*) En prenant pour nouveaux axes de coordonnées les bissectrices des angles des anciens axes, l'équation (3) se réduit à $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (2r)^{\frac{2}{3}}$.

ou

$$(1) \qquad a'(x+\alpha)\cos\theta + a'y\sin\theta = \alpha x + a'^2 - a^2.$$

On obtiendra l'équation de son enveloppe en éliminant θ entre cette équation et sa dérivée par rapport à θ

$$(2) \qquad -a'(x+\alpha)\sin\theta + a'y\cos\theta = 0.$$

En ajoutant membre à membre ces deux équations élevées au carré, l'élimination se trouve faite, et l'on a

$$a'^2(x+\alpha)^2 + a'^2y^2 = (\alpha x + a'^2 - a^2)^2,$$

ou

$$(3) \qquad (a'^2-\alpha^2)x^2 + a'^2y^2 + 2a^2\alpha x + a'^2\alpha^2 - (a'^2-a^2)^2 = 0.$$

L'enveloppe est une conique symétrique par rapport à O'P. La conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que le point P est dans le cercle O', sur la circonférence, ou extérieur au cercle. Si P coïncide avec O', le lieu est une circonférence concentrique à la circonférence O'.

Solution géométrique. — Toute droite issue du point P rencontre le cercle O' en deux points réels ou imaginaires, d'où résultent deux cercles O, et par suite deux polaires parallèles, réelles ou imaginaires. L'enveloppe des polaires est donc une courbe telle que d'un point quelconque de l'infini on peut lui mener deux tangentes réelles ou imaginaires : elle est de seconde classe, et par conséquent une conique.

Si le point P est à l'intérieur du cercle O', l'enveloppe a des tangentes réelles parallèles à toutes les directions : c'est une ellipse, qui se réduit à un cercle lorsque P coïncide avec O'.

Si le point P est extérieur au cercle O', les tangentes

réelles de l'enveloppe sont perpendiculaires aux droites menées de P dans l'angle TPT′ des tangentes au cercle O′ : cette enveloppe est donc une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires aux droites PT, PT′. Si le point P est sur la circonférence O′, l'enveloppe n'a qu'une seule tangente à distance finie parallèle à chaque direction, et elle est tangente à la droite de l'infini : c'est une parabole.

Dans tous les cas, l'axe O′P est l'axe focal.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; C. Jugane, étudiant en droit, à Paris; E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Armand Bertrand, propriétaire à Azillanet; Droz; Lez; Ed. Guillet; Lambiotte; Beaugey; B. Robaglia (à Philippeville); J. Chambon; Albert Lacazette et Numa Parra, élèves au lycée de Bordeaux.

La solution de M. Droz est entièrement géométrique.

M. Bertrand résout cette question plus générale, dont les questions 1211 et 1265, sont des cas particuliers :

« *On donne sur un plan un point fixe* P *et deux cercles* O, A. *Une circonférence* O′, *variable, dont le centre est situé sur la circonférence* O, *coupe orthogonalement le cercle* A; *déterminer l'enveloppe de la polaire du point* P, *par rapport à* O′. »

Question 1271

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 288);

PAR M. ALBERT LACAZETTE,

Élève du lycée de Bordeaux.

On donne un plan (P) *et une droite fixe* (D) *qui rencontre le plan en un point* O. *Par la droite* (D), *on mène un plan* (π) *qui coupe* (P) *suivant une droite* Om : *on élève sur* Om, *dans le plan* (π), *une perpendiculaire* Oμ ; *quel est le lieu de cette perpendiculaire ?*

(GENTY.)

Solution géométrique. — Toutes les droites dont on cherche le lieu passant par un point fixe O, le lieu est un cône.

Et l'on peut voir que tout plan parallèle au plan (P) coupe ce cône suivant un cercle.

En effet, une génératrice $O\mu$ du cône est donnée par l'intersection du plan (π) et d'un plan perpendiculaire à la droite Om, au point O. Les traces du plan (π) et du plan perpendiculaire à Om sur le plan (P) sont des droites rectangulaires Om, Om' ; et il en sera de même des traces de ces deux plans sur tout plan (P'), parallèle à (P). Donc, en nommant α, μ et s les points auxquels le plan (P') est rencontré par les droites (D), $O\mu$, et par la perpendiculaire Os, élevée au plan (P), au point O ; l'angle $s\mu\alpha$ sera droit. Par conséquent, la section du cône par un plan (P') parallèle au plan (P) est le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés passent par deux points fixes α et s, c'est-à-dire un cercle ayant αs pour diamètre.

Solution analytique. — Je prends pour axes des coordonnées trois droites rectangulaires ; la droite (D) dans le plan des axes xz, et le plan des xy étant le plan (P), par suite, le point O est l'origine.

Les équations de la droite (D) seront $y = 0$, $x = mz$; et l'équation d'un plan (π), $y + \lambda(x - mz) = 0$. La droite Om sera représentée par $z = 0$, $y + \lambda x = 0$.

L'équation du plan perpendiculaire à Om, au point O, sera $\lambda y = x$, et une droite du lieu aura pour équations

$$\lambda y = x, \quad y + \lambda(x - mz) = 0.$$

En éliminant λ, on a $y^2 + x^2 - mxz = 0$; équation d'un cône qui admet pour génératrices la droite (D) et

l'axe des z. L'une des directions des plans cycliques de ce cône est parallèle au plan donné (P) [*].

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; A. Droz; Fauquembergue; Lambiotte; Lez; J. Chambon; Numa Parra, élève du lycée de Bordeaux.

Question 1273

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 288);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Si r représente le rayon du cercle inscrit dans un triangle, et p le demi-périmètre, on a $p^2 > 27r^2$.

(D. EDWARDS.)

On a

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p};$$

la question revient donc à démontrer que

$$p^3 > 27(p-a)(p-b)(p-c),$$

ou

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c).$$

Or on sait (*Questions d'Algèbre* de M. Desboves) que l'on a

$$abc > (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c),$$

et

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > abc;$$

(*) Et l'autre perpendiculaire à la droite (D).

donc, *a fortiori*,

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 > (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c).$$

C. Q. F. D.

Note. — M. Fauquembergue donne une seconde démonstration fondée sur cette proposition connue, que :

De tous les triangles circonscrits à un même cercle, celui qui a le plus petit périmètre est équilatéral.

La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Sondat; Ferdinando Pisani; Eugène Delmas, élève du lycée de Lyon.

Question 1274

(voir 2e série, t. XVII, p. 288);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

Dans toute solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $24x^2+1=y^2$, *le produit* xy *des valeurs des inconnues est toujours un multiple de* 5.

x, y étant des entiers qu'on peut supposer positifs, le chiffre des unités est un des chiffres suivants :

Dans x^2.	0,	1,	4,	5,	6,	9;
Dans $24x^2$.	0,	4,	6,	0,	4,	6;
Dans $24x^2+1$ ou y^2. .	1,	5,	7,	1,	5,	7;

mais le chiffre des unités d'un entier qui est un carré parfait ne peut être 7; donc le chiffre des unités de y^2 est 5 ou 1.

Dans le premier cas, le chiffre des unités de y est 5; y est donc multiple de 5.

Dans le second cas, le tableau ci-dessus montre que le chiffre des unités de x^2, et par suite de x, est 0 ou 5; x est encore multiple de 5.

Des deux valeurs correspondantes de x et de y, il y en a toujours une et une seule qui est un multiple de 5; leur produit est donc un multiple de 5.

Note. — Autres solutions de MM. Réalis; Moret-Blanc; Sondat.

Question 1276

(voir 2e série, t. XVII, p. 336);

PAR M. R.-W. GENESE.

Soient ABC *un triangle et* O *un point quelconque du plan; démontrer que la puissance de* O, *par rapport au cercle circonscrit au triangle, a pour expression*

$$\frac{a^2.\mathrm{OCB} + b^2.\mathrm{OAC} + c^2.\mathrm{OBA}}{\mathrm{ABC}},$$

a, b, c étant les longueurs des trois droites OA, OB, OC, *et les aires* OCB, ... *recevant des signes convenables, suivant le sens dans lequel elles sont parcourues.*

(LAISANT.)

Le point O est le centre de gravité de trois poids posés aux points A, B, C, et proportionnels, respectivement, aux aires BOC, COA, AOB (auxquelles il faut donner des signes convenables).

Le moment d'inertie de ces poids, par rapport au centre S du cercle circonscrit au triangle ABC, est égal à

$$\mathrm{BOC} \times \mathrm{OA}^2 + \mathrm{COA} \times \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AOB} \times \mathrm{OC}^2 + \mathrm{ABC} \times \mathrm{OS}^2;$$

mais ce moment a aussi pour valeur

$$\mathrm{BOC} \times \mathrm{SA}^2 + \mathrm{COA} \times \mathrm{SB}^2 + \mathrm{AOB} \times \mathrm{SC}^2, \quad \text{ou} \quad \mathrm{ABC} \times \mathrm{R}^2,$$

en désignant par R le rayon du cercle; donc

$$\mathrm{BOC} \times \mathrm{OA}^2 + \mathrm{COA} \times \mathrm{OB}^2 + \mathrm{AOB} \times \mathrm{OC}^2 = \mathrm{ABC}(\mathrm{R}^2 - \mathrm{OS}^2);$$

le théorème est donc démontré.

Question 1276

(Seconde solution);

PAR M. H. LEZ.

Le cercle, passant par trois points A, B, C, a pour équation générale

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, on peut le mettre sous une forme qui rappelle le théorème de Feuerbach :

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} - (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} - (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Or, si l'on remplace les coordonnées courantes par celles d'un point quelconque $D(\alpha, \beta)$ et qu'on divise par le coefficient de x^2, on aura la puissance P de ce point par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC. De plus, si ce point se confond avec l'origine variable O des coordonnées choisies arbitrairement, on aura tout de suite

$$\text{P.}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1^2+y_1^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ (x_2^2+y_2^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} + (x_3^2+y_3^2)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

ce qui démontre le théorème proposé.

Note. — La question 1276 a aussi été résolue par MM. Moret-Blanc et Ferdinando Pisani.

Au sujet de cette même question, M. H. Faure nous écrit :

« Dans mon recueil de théorèmes relatif aux sections coniques, figure l'énoncé suivant (page 11) : On donne deux cercles A, B et trois points a, b, c sur le premier. Si l'on désigne par α, β, γ les puissances de ces points, par rapport au cercle B ; par μ et μ' les puissances d'un point arbitraire m, par rapport aux cercles B, A, on a la relation

$$\alpha . mbc + \beta . mca + \gamma . mab = abc(\mu - \mu').$$

Or, si l'on suppose que le cercle B se réduise à un point et que l'on prenne le point m pour ce point, on obtient le théorème 1276, énoncé par M. Laisant. J'ajoute que mon théorème s'étend au cas de deux sphères A et B, en prenant sur la première quatre points arbitraires.

QUESTIONS.

1288. Une parabole P, de paramètre constant, se meut dans son plan parallèlement à elle-même, de façon que chacun de ses points décrive une parabole P′ de paramètre donné, dont l'axe soit parallèle à celui de la parabole mobile. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe donné, par rapport à la parabole P.

Même question en supposant la parabole P′ remplacée par une droite de direction quelconque. (Laisant.)

1289. Quel que soit m, l'intégration de l'équation

$$y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{m+1}{m+2}\frac{dy^2}{dx^2} = (ax^2 + bx + c)^m$$

peut se ramener à des quadratures. (Moreau.)

1290. Soient r, r_1, r_2, r_3 les rayons des cercles tangents aux côtés d'un triangle ; démontrer que

$$a + b + c = 3(r^{-1}r_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}} - (rr_1^{-1}r_2r_3)^{\frac{1}{2}} - (rr_1r^{-1}r_3)^{\frac{1}{2}} - (rr_1r_2r_3^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

(T. Mitcheson, B. A; L. C. P., *The Educational Times*.)

1291. L'équation $x^5 + x^3 + x^2 + x - 1 = y^2$ est impossible en nombres entiers et *positifs*.

1292. Démontrer qu'il est impossible de résoudre, en nombres entiers, aucune de ces trois équations indéterminées :

$$(1) \quad x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 + x_4^6 + x_5^6 + x_6^6 + x_7^6 = 9x_8 + 8,$$

$$(2) \quad x^3 + y^6 = 9z + 7,$$

$$(3) \quad x^3 + y^6 = 7z + 5.$$

(LAISANT.)

1293. Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube. (LAISANT.)

1294. Démontrer que la somme des inverses de n nombres positifs en progression arithmétique excède le quotient de n^2 par la somme des termes de la progression.

Déduire de cette proposition la divergence de la série

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{8}\right) + \ldots.$$

(LIONNET.)

RÉFLEXIONS SUR LA CINÉMATIQUE DU PLAN;

Par M. A. LAISANT.

Préliminaires.

1. Il est généralement admis désormais que la Cinématique est une branche spéciale de la Mécanique rationnelle, qui peut et doit être étudiée préalablement aux autres. La Cinématique a tous les caractères de la Géométrie, avec l'addition de l'idée du *temps;* et il se trouve bien souvent qu'elle peut rendre à la Géométrie elle-même d'importants services.

Dès lors il est permis de se demander s'il n'y aurait pas un certain intérêt à procéder en Cinématique, comme on le fait en Géométrie, en commençant par l'étude des mouvements qui s'accomplissent *dans un seul plan,* avant de s'appliquer à ceux qui s'effectuent *dans l'espace.* Il y aurait peut-être à cela plusieurs avantages, en dehors de la question de méthode et d'analogie que nous venons de signaler. Bornons-nous à indiquer les deux suivants, d'ordres très-distincts l'un de l'autre.

En premier lieu, au point de vue pratique, la plupart des combinaisons d'organes de transmissions de mouvement reposent sur des translations dans des plans parallèles et sur des rotations autour d'axes parallèles, tous perpendiculaires à ces plans. Les exemples en sont nombreux, même dans des machines assez compliquées. Le praticien, le constructeur en possession de la *cinématique plane,* mais n'ayant pas étudié la *cinématique de l'espace,* aurait donc au moins les éléments principaux nécessaires à la pratique de son art.

En second lieu, lorsqu'on applique l'Analyse à la Cinématique, comme sont conduits à le faire de plus en plus les auteurs, afin de donner aux déductions un caractère de généralité aussi grand que possible, on se trouve forcé de passer à chaque instant de la géométrie analytique du plan à celle de l'espace, et inversement. L'inconvénient est sérieux; il n'est peut-être pas capital tant qu'on s'en tient aux méthodes ordinaires, puisqu'en définitive l'instrument algébrique est le même dans un cas que dans l'autre. Mais la confusion deviendrait extrême le jour où l'on se déciderait à faire usage des méthodes du calcul géométrique, dont l'application est si souvent féconde et élégante, et qui commencent à être employées dans divers pays étrangers, notamment en Angleterre et aux États-Unis. Pour l'étude des mouvements de l'espace, il faut, en effet, dans cette hypothèse, recourir à l'analyse des *quaternions*, et aborder par conséquent les difficultés inhérentes à l'emploi de cet algorithme. Pour les mouvements plans, au contraire, on n'a qu'à employer le calcul géométrique des *équipollences*, dont les règles sont identiquement les mêmes que celles de l'Algèbre. La classification de la Cinématique en deux grandes branches, plan et espace, se trouve donc encore tout naturellement indiquée.

Je ne veux pas pousser plus loin cette discussion à propos de l'enseignement de la Cinématique, discussion sur laquelle on pourrait insister plus longuement. Comme argument à l'appui des considérations qui précèdent, je me propose, dans la présente étude, d'appliquer à un certain nombre de questions de Cinématique plane les procédés du calcul des équipollences; j'espère arriver ainsi à montrer une fois de plus l'intérêt qu'il y a lieu d'apporter à l'emploi des méthodes *dites nouvelles,* et qui sont pour la plupart assez anciennes déjà.

Il ne s'agit pas ici d'un exposé didactique et méthodique d'une science; je ne me propose nullement, dans ces considérations, de rédiger un traité, ni même le résumé d'un traité. Je prie donc le lecteur de me pardonner la forme un peu décousue peut-être de ce Mémoire, forme qui résulte du programme même que je me suis donné.

Si j'avais à composer un traité de Cinématique plane j'emploierais parfois, assez fréquemment même, mais non pas toujours, la méthode des équipollences; les méthodes devant être, à mon avis, en Mathématiques, ce que sont les outils dans un atelier, l'outil doit varier suivant le travail qu'on se propose, si l'on veut que ce travail soit exécuté le mieux, le plus promptement et le plus facilement possible. L'ouvrier habile est celui qui non-seulement sait manier son outil, mais sait aussi le choisir avec discernement, au lieu d'employer constamment le même.

Mouvement d'un point. — Vitesses.

2. Le mouvement d'un point X dans un plan est représenté par une équipollence de la forme

$$\mathrm{OX} = f(t) \ (^*)$$

t exprimant le temps, f une fonction géométrique, et O une origine fixe. Le signe $=$ est ici celui de l'*équipollence* ou de l'*égalité géométrique*. Quant à la variable géométrique OX qui fixe à chaque instant la position du point mobile, nous la désignerons le plus souvent par la même lettre que son extrémité, écrite en petites

(*) *Voir* BELLAVITIS, *Exposition de la méthode des équipollences*, traduction française, p. 120 (Gauthier-Villars, 1874).

capitales; si bien que l'équipollence du mouvement s'écrira

$$(1) \qquad \mathrm{x} = f(t).$$

Le déplacement élémentaire du point est $d\mathrm{x}$, et la dérivée

$$(2) \qquad \mathrm{v} = \frac{d\mathrm{x}}{dt} = f'(t)$$

exprime évidemment la vitesse à l'instant t.

Si l'on écrit $\mathrm{OV} = \mathrm{v}$, le mouvement représenté par l'équation (2) est le *mouvement hodographique* du premier, et la trajectoire de V, ainsi décrite, l'*hodographe* de ce même mouvement de X.

L'aire infiniment petite, décrite par OX pendant le temps dt, est représentée en grandeur *et en signe* (suivant le sens de la rotation de OX), par

$$\frac{i}{4}(\mathrm{x}.\mathrm{cj}\, d\mathrm{x} - \mathrm{cj}\,\mathrm{x}.d\mathrm{x})\ (^*),$$

et en divisant par dt, on a la *vitesse aréolaire*

$$(3) \qquad u = \frac{i}{4}(\mathrm{x}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v} - \mathrm{cj}\,\mathrm{x}.\mathrm{v}).$$

3. Si le mouvement d'un point X résulte de la composition des mouvements de plusieurs autres points X_1, X_2, X_3, ..., c'est-à-dire de l'*addition géométrique* de OX_1, OX_2, OX_3, ..., on aura évidemment, d'après la relation (2),

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_1 + \mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_3 + \ldots;$$

(*) *Voir* Bellavitis, *Exposition de la méthode des équipollences*, traduction française, p. 45. La lettre i remplace ici le *ramun*, pour plus de facilité typographique.

d'où résulte immédiatement la méthode de Roberval pour le tracé des tangentes.

4. Effectuons le quotient $\frac{\mathrm{x}}{\frac{d\mathrm{x}}{dt}} = \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{v}}$, et mettons-le sous la forme $l + \lambda i$. Alors $\mathrm{x} = l\mathrm{v} + \lambda i \mathrm{v}$, et il en résulte que les relations

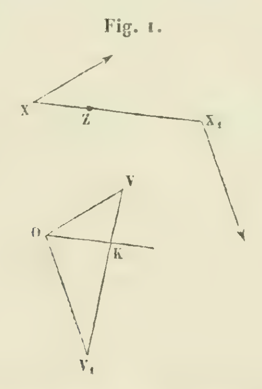
$$(4) \qquad \mathrm{P} = \lambda i \mathrm{v}, \quad \mathrm{Q} = l\mathrm{v}$$

représentent respectivement des mouvements sur la *podaire* de la trajectoire, et sur la *podaire de la développée* de cette trajectoire. Les équipollences (4) peuvent donc servir à l'étude géométrique de ces deux courbes.

5. A l'aide de cette méthode de calcul géométrique, on peut établir de nombreuses propriétés des vitesses, et résoudre des problèmes de Géométrie ou de Cinématique, souvent avec une extrême facilité. A titre d'exemple, nous nous contenterons d'indiquer celui-ci :

Déterminer l'enveloppe de la droite qui joint à chaque instant deux points mobiles.

Fig. 1.



Soient O l'origine (*fig.* 1); X et X_1 les positions des deux points mobiles à l'instant t; OV et OV_1 leurs vi-

tesses respectives; enfin Z le point cherché de l'enveloppe.

Ce point Z étant situé sur la droite XX_1, nous aurons, k étant un paramètre variable algébrique,

$$(5) \qquad z = kx + (1-k)x_1;$$

d'où, pour la vitesse de Z,

$$(6) \qquad \frac{dz}{dt} = kv + (1-k)v_1 + dk(x - x_1).$$

Cette vitesse, pour que Z soit situé sur l'enveloppe, doit avoir même direction que XX_1. Mais le dernier terme ayant déjà cette direction, il suffit de poser

$$(7) \qquad kv + (1-k)v_1 \parallel x - x_1 \quad (*)$$

pour déterminer k.

Cela donne lieu, comme l'on voit, à la construction géométrique très-simple que voici pour déterminer le point Z : mener OK, parallèle à XX_1, jusqu'à la rencontre de VV_1, et diviser XX_1 en Z comme VV_1 est divisé en K.

La relation (7) permet de déterminer k par le calcul, en remplaçant dans le second membre $x - x_1$ par $u(x-x_1)$ et éliminant ensuite u entre l'équipollence ainsi obtenue et l'équipollence conjuguée. Cela donne le moyen d'avoir ainsi, dans chaque cas particulier, la détermination du mouvement de Z et celle de sa vitesse, en se servant des relations (5) et (6).

Accélérations.

6. L'accélération étant la dérivée géométrique de la

(*) Le signe $\parallel$ employé ici est celui du *parallélisme*, c'est-à-dire de l'égalité de direction, indépendamment de la grandeur.

vitesse par rapport au temps aura pour expression

(8) $$\mathrm{w} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = f''(t).$$

En appelant v la grandeur de la vitesse, et φ son inclinaison, on a $\mathrm{v} = v\varepsilon^{\varphi}$ (*) ce qui permet de donner encore à l'accélération la forme

(9) $$\mathrm{w} = \frac{dv}{dt}\varepsilon^{\varphi} + iv\frac{d\varphi}{dt}\varepsilon^{\varphi} = \varepsilon^{\varphi}\left(\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{\rho}i\right),$$

ρ étant le rayon de courbure.

Cette décomposition peut encore s'effectuer en posant

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{v}} = m + \mu i;$$

d'où il suit que

(10) $$m\mathrm{v} = \frac{dv}{dt}\varepsilon^{\varphi} \quad \text{et} \quad i\mu\mathrm{v} = i\frac{v^2}{\rho}\varepsilon^{\varphi}.$$

On peut remarquer, en égalant les grandeurs, qu'on obtient ainsi les équations

(11) $$m = \frac{\frac{dv}{dt}}{v}, \qquad \mu = \frac{v}{\rho},$$

et aussi

$$v = a e^{\int_0^t m\,dt},$$

qui peuvent à l'occasion présenter quelque intérêt, et dont la seconde donne le rayon de courbure au moyen de μ.

Si le point mobile X est rapporté à des coordonnées

(*) Rappelons que ε est employé pour e^i.

polaires, on a

$$(12)\qquad x = r\varepsilon^{\theta},$$

$$(13)\qquad v = \frac{dr}{dt}\varepsilon^{\theta} + i.r\frac{d\theta}{dt}\varepsilon^{\theta},$$

$$(14)\qquad w = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\varepsilon^{\theta} + \frac{1}{r}\,\frac{d\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)}{dt}\,i\varepsilon^{\theta},$$

décompositions connues de la vitesse et de l'accélération.

Accélérations centrales.

7. Une accélération *centrale* étant assujettie à passer constamment par un point fixe, prenons ce point pour origine, et supposons que le point mobile soit déterminé par des coordonnées polaires, sous la forme (12).

Appelons en outre w la grandeur de l'accélération w; nous aurons alors

$$(15)\qquad w = w.\varepsilon^{\theta},$$

c'est-à-dire, par comparaison avec la relation (14), qu'il faut

$$\frac{d.r^2\frac{d\theta}{dt}}{dt} = 0,$$

$$(16)\qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = c.$$

En d'autres termes, la vitesse aréolaire $\frac{1}{2}c$ est constante.

Cherchons maintenant à étudier l'hodographe du mouvement, et, dans ce but, exprimons-en le rayon de courbure. D'après la seconde relation (11), il suffit pour cela de mettre $\dfrac{\frac{dw}{dt}}{w}$ sous la forme $m' + \mu' i$, comme nous le fai-

sions tout à l'heure pour $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{v}}$, et le rayon de la courbure cherché sera $\frac{\mathrm{w}}{\mu'}$.

Or

$$\frac{d\mathrm{w}}{dt} = \mathrm{w}' = \frac{dw}{dt}\varepsilon^{\theta} + iw\frac{d\theta}{dt}\varepsilon^{\theta} = \left(\frac{dw}{dt} + i\frac{cw}{r^2}\right)\varepsilon^{\theta},$$

en vertu de l'équation (16). Donc

$$(17) \qquad \frac{\mathrm{w}'}{\mathrm{w}} = \frac{\frac{dw}{dt}}{w} + i\frac{c}{r^2},$$

et par conséquent le rayon de courbure de l'hodographe est

$$(18) \qquad \rho_h = \frac{wr^2}{c},$$

en sorte que *ce rayon de courbure est proportionnel au produit de l'accélération par le carré du rayon vecteur.*

Il s'ensuit immédiatement diverses conséquences importantes, et en premier lieu celle qui est relative au cas de l'accélération dont la grandeur est en raison inverse du carré du rayon vecteur. Il est clair en effet que dans cette hypothèse l'hodographe sera une circonférence, et réciproquement, pour tout mouvement d'accélération centrale.

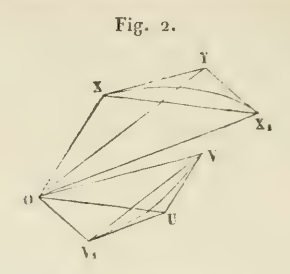
Si l'accélération est inversement proportionnelle au rayon vecteur, le rayon de courbure de l'hodographe est alors proportionnel à ce rayon. En général, si w est proportionnel à r^n, ρ_h sera proportionnel à r^{n+2}.

8. Voici encore une propriété commune à tous les

mouvements d'accélération centrale, et qui a été énoncée par Hamilton.

Si X et X_1 sont deux positions du mobile sur la trajectoire ; V et V_1 les points correspondants de l'hodo-

Fig. 2.



graphe ; XY et X_1Y les tangentes à la trajectoire, se rencontrant en Y ; et VU et V_1U les tangentes à l'hodographe, se rencontrant en U ; alors OY est parallèle à la corde VV_1 de l'hodographe, et OV est parallèle à la corde XX_1 de la trajectoire.

Ce théorème, qu'on peut très-facilement démontrer géométriquement, est une conséquence de la constance des aires. En voici une démonstration analytique. On a

$$\text{x}.\text{cj}\,\text{v} - \text{cj}\,\text{x}.\text{v} = \text{x}_1.\text{cj}\,\text{v}_1 - \text{cj}\,\text{x}_1.\text{v}_1,$$

$$\text{y} = \text{x} + y\text{v} = \text{x}_1 + y_1\text{v}_1, \quad \text{u} = \text{v} + u\text{x} = \text{v}_1 + u_1\text{x}_1;$$

d'où

$$\text{y}.\text{cj}\,\text{v} - \text{cj}\,\text{y}.\text{v} = \text{y}.\text{cj}\,\text{v}_1 - \text{cj}\,\text{y}.\text{v}_1,$$

$$\text{y}.\text{cj}(\text{v} - \text{v}_1) = \text{cj}\,\text{y}.(\text{v} - \text{v}_1),$$

et par conséquent

$$\text{y} \parallel \text{v} - \text{v}_1.$$

On a de même

$$\text{u} \parallel \text{x} - \text{x}_1.$$

9. On peut reconnaître que, pour une accélération centrale, la trajectoire est une conique chaque fois que l'hodographe est circulaire.

Dans ce cas, la vitesse peut évidemment se mettre sous la forme

(19) $$\mathrm{v} = a\varepsilon^{\alpha} + b\varepsilon^{\varphi},$$

φ étant seul variable dans cette équipollence. De là

$$\mathrm{w} = ib\,\frac{d\varphi}{dt}\,\varepsilon^{\varphi},$$

de telle sorte que la direction de w est perpendiculaire à celle de ε^{φ}. Mais cette direction de l'accélération est la même que celle du rayon vecteur $\mathbf{x} = r\varepsilon^{\theta}$; par conséquent $\varphi + \frac{\pi}{2} = \theta$, et v peut se mettre sous la forme

(20) $$\mathrm{v} = a\varepsilon^{\alpha} - ib\varepsilon^{\theta}.$$

Égalant cette valeur à celle de la relation (13) et divisant par ε^{θ},

$$\frac{dr}{dt} + ir\frac{d\theta}{dt} = a\varepsilon^{(\alpha-\theta)} - ib,$$

ou [formule (16)]

$$\frac{dr}{dt} + i\frac{c}{r} = a\cos(\alpha - \theta) + i[a\sin(\alpha - \theta) - b],$$

et, par l'expression de l'égalité des parties imaginaires,

(21) $$r = \frac{c}{a\sin(\alpha - \theta) - b},$$

équation d'une conique rapportée à son foyer. Ainsi, pour l'hodographe circulaire, la trajectoire est toujours une conique, et le centre des accélérations occupe l'un des foyers de cette conique.

La loi de l'inverse du carré de la distance se déduit d'ailleurs immédiatement du calcul ci-dessus, puisque w est d'une grandeur proportionnelle à $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2}$.

Autres propriétés des accélérations.

10. La proportionnalité des aires décrites et des temps, pour une accélération centrale, n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale, s'appliquant à tous les mouvements plans possibles.

Soient σ l'aire décrite par le rayon vecteur au temps t ; X le point mobile ; XH la vitesse ; XK son accélération.

On a bien évidemment

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{aire OXH} = \frac{i}{4}(\mathbf{x}.\text{cj}\,\mathbf{v} - \text{cj}\,\mathbf{x}.\mathbf{v}),$$

Prenant les dérivées, en nous rappelant toujours que v et w sont les deux premières dérivées de x,

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \frac{i}{4}(\mathbf{x}.\text{cj}\,\mathbf{w} - \text{cj}\,\mathbf{x}.\mathbf{w}) = \text{aire OXK}.$$

Ainsi la vitesse aréolaire est mesurée par l'aire du triangle OXH, et l'accélération aréolaire par celle de OXK ; d'où il suit que cette dernière est constamment la dérivée de la précédente.

Pour le cas d'une accélération centrale, l'aire OXK est constamment nulle ; conséquemment $\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$, et les aires σ croissent proportionnellement aux temps.

Si les aires croissaient proportionnellement aux carrés des temps, on aurait $\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \text{const.}$; donc aire OXK serait constante, c'est-à-dire que l'accélération serait en raison inverse de la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur sa direction.

Réciproquement, s'il en est ainsi, on aura

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = \text{const.} = a,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = at + b,$$

$$\sigma = \frac{a}{2}t^2 + bt,$$

en faisant coïncider l'origine des aires avec la position du rayon vecteur à l'origine des temps.

11. *Le demi-accroissement du carré de la vitesse, relatif à l'élément de temps, est égal au produit de l'accélération par la projection sur l'accélération du chemin élémentaire.* (Resal, *Cinématique pure*, p. 66.)

En effet, le carré v^2 de la vitesse est $\mathrm{v}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v}$; d'où

$$dv^2 = d\mathrm{v}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v} + \mathrm{v}.\mathrm{cj}\,d\mathrm{v} = \mathrm{w}.\mathrm{cj}\,\mathrm{v}\,dt + \mathrm{v}\,dt.\mathrm{cj}\,\mathrm{w}$$
$$= \mathrm{w}.\mathrm{cj}\,d\mathrm{x} + d\mathrm{x}.\mathrm{cj}\,\mathrm{w},$$

ce qui démontre la propriété en question.

On passerait de là aux déplacements finis, comme d'habitude.

12. Les propriétés de l'accélération, et notamment la décomposition en accélération normale et accélération tangentielle, permettent, avec une grande facilité, de déterminer et de construire les rayons de courbure de certaines courbes (la spirale d'Archimède, les coniques, la cycloïde, par exemple). Nous ne développerons aucun calcul à ce sujet, dans le seul but d'éviter de trop allonger cette Note. Le lecteur y suppléera facilement.

Accélérations des divers ordres.

13. Nous avons remarqué que, si x indique la position d'un point mobile, v sa vitesse, w son accélération,

v et w sont les deux premières dérivées de x. Nous donnerons le nom d'*accélérations des divers ordres* aux dérivées suivantes w_2, w_3, ... L'accélération du second ordre w_2, c'est-à-dire la deuxième dérivée de la vitesse, est souvent appelée aussi *suraccélération* du mobile.

Proposons-nous de chercher à décomposer une accélération d'ordre quelconque, comme nous l'avons fait pour la première, suivant la tangente et la normale à la courbe. A cet effet, supposons que cette décomposition soit obtenue pour l'accélération w_p, et appelons $w_{t,p}$, $w_{n,p}$ les deux composantes. Si nous prenons la vitesse, comme plus haut, sous la forme

$$v = v\varepsilon^{\varphi},$$

il est évident qu'on aura

$$(22)\qquad w_p = (w_{t,p} + i w_{n,p})\,\varepsilon^{\varphi}.$$

Cela posé, pour obtenir w_{p+1}, il suffit de prendre la dérivée de l'expression (22), ce qui donne

$$(23)\quad w_{p+1} = \left[\left(\frac{dw_{t,p}}{dt} - w_{n,p}\frac{v}{\rho}\right) + i\left(\frac{dw_{n,p}}{dt} + w_{t,p}\frac{v}{\rho}\right)\right]\varepsilon^{\varphi},$$

en se rappelant toujours que $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{\rho}$.

Donc

$$(24)\qquad w_{t,p+1} = \frac{dw_{t,p}}{dt} - w_{n,p}\frac{v}{\rho},$$

$$(25)\qquad w_{n,p+1} = \frac{dw_{n,p}}{dt} + w_{t,p}\frac{v}{\rho},$$

ce qui fournit une méthode générale pour résoudre le problème proposé, en partant des premières valeurs de w_n et w_p, qui sont, comme nous l'avons vu, $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, respectivement.

Dans ces calculs, les dérivées successives de ρ se présenteront évidemment. On peut leur donner une interprétation géométrique avantageuse; car on a tout d'abord

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \rho_1 \frac{v}{\rho},$$

si nous appelons ρ_1 le rayon de courbure de la développée de la trajectoire.

Et d'une manière générale, si ρ_p est le rayon de courbure de la $p^{\text{ième}}$ développée,

$$\frac{d\rho_p}{dt} = \rho_{p+1}\frac{v}{\rho}.$$

Par conséquent, en faisant ces substitutions, au fur et à mesure, dans les dérivations successives, on introduira les rayons de courbure des développées successives de la trajectoire, au lieu d'expressions analytiques dont l'interprétation concrète serait peu saisissable.

Le calcul, fait comme nous venons de l'indiquer, nous donne, pour les composantes de la suraccélération,

$$(26)\qquad w_{t,2} = \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^2}, \qquad w_{n,2} = 3\frac{v}{\rho}\frac{dv}{dt} - \frac{v^3}{\rho^3}\rho_1;$$

et, pour celles de l'accélération du troisième ordre,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} w_{t,3} &= \frac{d^3 v}{dt^3} - 6\frac{v^2}{\rho^2}\frac{dv}{dt} + 3\frac{v^4}{\rho^4}\rho_1, \\ w_{n,3} &= 4\frac{v}{\rho}\frac{d^2 v}{dt^2} + 3\frac{1}{\rho}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - 6\frac{v^2}{\rho^3}\rho_1\frac{dv}{dt} \\ &\quad + 3\frac{v^4}{\rho^5}\rho_1^2 - \frac{v^4}{\rho^4}\rho_2 - \frac{v^4}{\rho^3}. \end{aligned}\right.$$

On voit que les expressions se compliquent singulièrement à mesure qu'on passe d'un ordre à un ordre supérieur.

Les circonstances relatives au mouvement uniforme, ou au mouvement circulaire, s'obtiendraient respectivement en annulant $\frac{dv}{dt}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, ..., ou bien en annulant ρ_1, ρ_2, ...

Pour le mouvement circulaire uniformément varié, en posant $\frac{dv}{dt} = \alpha$, les formules ci-dessus se réduisent à

$$w_{t,2} = -\frac{v^3}{\rho^2}, \qquad w'_{n,2} = \frac{3\alpha v}{\rho},$$

$$w_{t,3} = -\frac{6\alpha v^2}{\rho^2}, \qquad w'_{n,3} = \frac{3\alpha^2}{\rho} - \frac{v^4}{\rho^3}.$$

Enfin, dans le mouvement uniforme et circulaire, les accélérations d'ordres impairs sont normales; celles d'ordres pairs sont tangentielles, ce qu'il est très-aisé de reconnaître directement.

14. On peut avoir quelquefois intérêt à effectuer la décomposition d'une accélération d'ordre quelconque, suivant la direction du rayon vecteur, et perpendiculairement à cette direction. Si w_p se décompose ainsi, en u_p et z_p, et si $\mathrm{x} = r\varepsilon^\theta$, on aura

$$(28) \qquad \mathrm{w}_p = (u_p + iz_p)\varepsilon^\theta;$$

d'où, prenant la dérivée et appelant ω la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$,

$$(29) \qquad \mathrm{w}_{p+1} = \left[\left(\frac{du_p}{dt} - \omega z_p\right) + i\left(\frac{dz_p}{dt} + \omega u_p\right)\right]\varepsilon^\theta,$$

c'est-à-dire

$$(30) \qquad u_{p+1} = \frac{du_p}{dt} - \omega z_p,$$

$$(31) \qquad z_{p+1} = \frac{dz_p}{dt} + \omega u_p.$$

Ces formules, analogues aux relations (24) et (25), serviront à la détermination successive des composantes des divers ordres.

Appelons ω', ω'', ... les accélérations angulaires des divers ordres $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d^2\omega}{dt^2}$, ..., et q, q', q'', ... la vitesse et les accélérations successives de translation $\frac{dr}{dt}$, $\frac{d^2r}{dt^2}$, $\frac{d^3r}{dt^3}$, ... Alors l'application des formules (30), (31), en partant, par exemple, de la vitesse $(q+i\omega r)\varepsilon^\theta$, nous donne, pour les composantes de l'accélération,

$$(32) \qquad u_1 = q' - \omega^2 r, \quad z_1 = 2\omega q + \omega' r;$$

pour celles de la suraccélération,

$$(33) \qquad \begin{cases} u_2 = q'' - 3\omega^2 q - 3\omega\omega' r, \\ z_2 = 3\omega q' + 3\omega' q + \omega'' r - \omega_3 r; \end{cases}$$

et enfin, pour l'accélération du troisième ordre,

$$(34) \qquad \begin{cases} u_3 = q''' - 6\omega^2 q' - 12\omega\omega' q - (3\omega'^2 + 4\omega\omega'')r + \omega^4 r, \\ z_3 = 4\omega q'' + 6\omega' q' + 4(\omega'' - \omega^3)q + (\omega''' - 6\omega^2\omega')r. \end{cases}$$

Ces calculs, dans le cas le plus général, deviennent assez compliqués; mais ils se simplifient souvent dans certaines applications particulières. Par exemple, dans le cas où q et ω sont constants (mouvement uniforme sur une spirale logarithmique), on voit que les accélérations successives, suivant le rayon vecteur, sont

$$-\omega^2 r, \ -3\omega^2 q, \ \omega^4 r, \ 5\omega^4 q, \ -\omega^6 r, \ -7\omega^6 q, \ \omega^8 r, \ \ldots,$$

et celles dirigées dans le sens perpendiculaire

$$2\omega q, \ -\omega^3 r, \ -4\omega^3 q, \ \omega^5 r, \ 6\omega^5 q, \ -\omega^7 r, \ -8\omega^7 q, \ \ldots;$$

la loi de formation successive est ici évidente.

15. Un point mobile se trouvant en X à un instant donné, soient à cet instant XU_0, XU_1, XU_2, ... sa vitesse et ses accélérations successives appliquées en X. La loi du mouvement de l'un quelconque des points U est aisée à déterminer, car on a

$$u_n = x + w_n;$$

d'où

$$\frac{du_n}{dt} = v + w_{n+1}, \quad \frac{d^2 u_n}{dt^2} = w + w_{n+2}.$$

Cela fournit le moyen de résoudre immédiatement, et cela par une construction des plus simples, le problème suivant :

Connaissant, à un instant quelconque, la position d'un point mobile X, *sa vitesse* XU_0 *et ses accélérations successives* XU_1, XU_2, XU_3, ..., *déterminer les tangentes et les rayons de courbure des trajectoires décrites par les points* U_0, U_1, U_2, ...

Un triangle formé par deux accélérations XU_n, XU_p a pour aire

$$\text{aire}(XU_nU_p) = \frac{i}{4}(w_n \,\text{cj}\, w_p - \text{cj}\, w_n\, w_p).$$

De là on déduit, pour la dérivée de cette aire,

(35) $\mathfrak{D}.\text{aire}(XU_nU_p) = \text{aire}(XU_{n+1}U_p) + \text{aire}(XU_nU_{p+1})$,

propriété plus générale encore que celle du n° 10.

Si $p = n + 1$, la relation (35) se réduit à

(36) $\mathfrak{D}.\text{aire}(XU_nU_{n+1}) = \text{aire}(XU_nU_{n+2})$.

Ainsi : *l'aire du triangle que forment deux accélérations d'ordres consécutifs a pour dérivée l'aire du triangle formé par la première de ces deux accélérations, avec celle qui la suit de deux rangs.*

Mouvement d'une figure dans un plan.

16. Considérons le déplacement fini d'une figure plane dans son plan. Soit OX une droite quelconque de la figure, qui vient en O_1X_1. Prenons O pour origine, et posons $OO_1 = A$; enfin appelons α l'angle des deux directions OX, O_1X_1. Il est visible que la figure peut être amenée de sa première position à la seconde, par une translation marquée par A, suivie d'une rotation égale à α autour du point O_1. Cela nous donne

$$(37) \qquad x_1 = A + x\varepsilon^\alpha.$$

En appliquant cette relation au point Ω, tel que

$$\Omega = A + \Omega\,\varepsilon^\alpha,$$

ce qui donne

$$(38) \qquad \Omega = \frac{A}{1-\varepsilon^\alpha},$$

le point Ω restera immobile, c'est-à-dire que le mouvement considéré équivaut à une rotation autour de ce point.

La construction de Ω se fait de la manière la plus simple, en traçant sur OO_1 comme base le triangle isoscèle $O\Omega O_1$, dont l'angle au sommet $O\Omega O_1$ est égal à α en grandeur et en signe.

S'il s'agit maintenant d'un mouvement infiniment petit, le point Ω prend le nom de *centre instantané de rotation ;* la formule (38) devient alors

$$(39) \qquad \Omega = i\,\frac{dA}{\alpha}.$$

17. Considérons maintenant le mouvement continu d'une figure plane ; soient M la position prise à l'instant t

par le point qui coïncidait d'abord avec l'origine O et λ l'angle total dont a tourné la figure à cet instant t.

D'après le numéro précédent, si nous appelons Ω le centre instantané de rotation, nous aurons

$$\text{M}\Omega = i\frac{d\text{M}}{d\lambda},$$

et par suite

$$\Omega = \text{M} + i\frac{d\text{M}}{d\lambda}. \tag{40}$$

Cette équipollence, M et λ étant donnés en fonction du temps, nous représente le lieu des centres instantanés sur le plan fixe.

Si nous ramenons la figure mobile à l'origine, en supposant qu'elle entraîne avec elle le point Ω, et que celui-ci vienne ainsi en Λ_0, le lieu des points Λ_0 sera évidemment donné par l'équipollence

$$\Lambda_0 = \frac{i\dfrac{d\text{M}}{d\lambda}}{\varepsilon^{\lambda}}. \tag{41}$$

Nous avons ainsi le lieu des centres instantanés liés à la figure mobile, ramené à l'origine.

Le roulement de la courbe (41), sur la courbe (40) comme base, représente le mouvement.

Un point ayant X_0 pour position initiale et entraîné par la figure mobile viendra au temps t en un point X donné par la relation

$$\text{X} = \text{M} + \text{X}_0\varepsilon^{\lambda}. \tag{42}$$

La courbe roulante, dans une position quelconque répondant à l'instant t', aura pour équipollence

$$\Lambda = \text{M}' + \frac{i\dfrac{d\text{M}}{d\lambda}}{\varepsilon^{\lambda}}\varepsilon^{\lambda'} = \text{M}' + i\frac{d\text{M}}{d\lambda}\varepsilon^{\lambda'-\lambda}. \tag{43}$$

Ici t' devra être considéré comme fixe, et t comme variable indépendante. Il est évident que, si l'on donne à t la valeur t', on tombera sur l'expression (40), c'est-à-dire que Λ coïncidera avec Ω.

Pour cette valeur particulière t', la différentielle de Λ, qui est

$$d\Lambda = \varepsilon^{\lambda'-\lambda}\left[d\mathrm{M} + id\left(\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}\right)\right],$$

se réduit à

$$d\mathrm{M}' + id\left(\frac{d\mathrm{M}'}{d\lambda'}\right) = d\Omega.$$

On reconnaît donc que les deux courbes (Ω) et (Λ) sont tangentes au point considéré, et que les vitesses sont égales, ce qui montre bien que le roulement s'effectue sans glissement.

18. D'après la relation (42), la vitesse d'un point X quelconque est

$$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \frac{1}{dt}(d\mathrm{M} + i\mathrm{X}_0 d\lambda.\varepsilon^{\lambda}) = \frac{i\,d\lambda}{dt}\left(\mathrm{X}_0\varepsilon^{\lambda} - i\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}\right).$$

Or, en retranchant la relation (40) de (42),

$$\mathrm{X} - \Omega = \mathrm{X}_0\varepsilon^{\lambda} - i\frac{d\mathrm{M}}{d\lambda}.$$

Donc

(44) $$\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \frac{i\,d\lambda}{dt}(\mathrm{X} - \Omega).$$

19. Si, pour obtenir l'accélération du point X, nous différentions la relation (44), nous trouvons sans peine

(45) $$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\mathrm{X}}{dt^2} = {} & -(\mathrm{X} - \Omega)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\ & + i(\mathrm{X} - \Omega)\frac{d^2\lambda}{dt^2} - i\frac{d\lambda}{dt}\frac{d\Omega}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Ce résultat connu se prête à un énoncé facile en langage ordinaire, et il s'obtient, comme l'on voit, sans introduction de considérations géométriques.

En différentiant simplement l'équipollence (42), on peut aussi mettre l'accélération sous la forme

$$(46) \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} \simeq \frac{d^2 \mathrm{M}}{dt^2} - x_0 \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \varepsilon^{\lambda} + i x_0 \frac{d^2\lambda}{dt^2} \varepsilon^{\lambda},$$

qui est également d'une interprétation facile.

Remplaçons la vitesse angulaire instantanée $\frac{d\lambda}{dt}$ par ω, pour plus de simplicité, dans les formules précédentes, et, partant de la formule (45) par exemple, cherchons la condition pour que l'accélération $\frac{d^2 x}{dt^2}$ s'annule. En appelant U le point pour lequel il en est ainsi, nous aurons

$$(47) \qquad \mathrm{U} \simeq \Omega + \frac{\omega \frac{d\omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dt} + i\omega^2},$$

c'est-à-dire que, pour chaque position de la figure, il y a un point U (centre des accélérations) et un seul, dont l'accélération est nulle.

On peut écrire encore

$$\Omega\mathrm{U}\left[1 + i\frac{\omega^2}{\frac{d\omega}{dt}}\right] \simeq \omega \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}},$$

$$\Omega\mathrm{U}\left[1 - i\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}\right] \simeq -i\frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\omega}.$$

Cela nous montre que la perpendiculaire élevée en U à la droite ΩU coupe la direction de la tangente com-

mune aux courbes roulantes en un point A, tel que

$$(48)\qquad \Omega A = \omega \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\frac{d\omega}{dt}};$$

et la normale commune en un point B tel que

$$(49)\qquad \Omega B = -i \frac{\frac{d\Omega}{dt}}{\omega}.$$

Si ω est constant, le centre des accélérations se réduit au point B, lequel est d'ailleurs indépendant du temps, puisqu'on peut écrire

$$\Omega B = -i \frac{d\Omega}{d\lambda}.$$

Pour cette raison, on donne souvent au point B la dénomination de *centre géométrique des accélérations.*

En faisant les mêmes calculs sur la formule (46), on a

$$MU = -\frac{\frac{d^2 M}{dt^2}}{\omega^2 - i\frac{d\omega}{dt}};$$

et, en procédant comme nous venons de le faire, on verrait que la perpendiculaire à MU en U coupe respectivement l'accélération du point M et une perpendiculaire à cette accélération en deux points A′ et B′, tels que

$$(50)\qquad MA' = \frac{\frac{d^2 M}{dt^2}}{\omega^2},$$

$$(51)\qquad MB' = i \frac{\frac{d^2 M}{dt^2}}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Donc, si l'on joint le centre des accélérations à un point quelconque M, et si l'on élève par ce centre une perpendiculaire à la droite ainsi menée, cette perpendiculaire coupera l'accélération du point M, et une perpendiculaire, en deux points déterminés respectivement par les relations (50) et (51) ci-dessus.

De plus, l'angle du rayon vecteur UM avec l'accélération de M a évidemment pour tangente $\frac{\frac{d\omega}{dt}}{\omega^2}$ ou $-\frac{d\left(\frac{1}{\omega}\right)}{dt}$.

Il serait facile de déduire de là de nombreuses propriétés des accélérations, et particulièrement celles qu'a données M. Transon, et dont on trouve l'exposé dans l'excellent Traité de Cinématique pure de M. Resal. Mais nous nous bornerons ici à ces considérations.

20. En prenant les dérivées successives de l'équipollence (46), il est aisé de voir, sans même effectuer le calcul, qu'on pourra toujours égaler à zéro chacune de ces dérivées, et que cela donnera chaque fois une valeur, et une seule, pour x_0. Donc il y a un *centre des accélérations* U_n pour les accélérations $\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}$ d'un ordre n quelconque.

Si nous reprenons la relation (42)

$$x = m + x_0 \varepsilon^{\lambda},$$

et si nous la différentions successivement, nous aurons

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dm}{dt} + \frac{d}{dt}(x_0 \varepsilon^{\lambda}),$$

. . . . ,

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} = \frac{d^{n+1}m}{dt^{n+1}} + \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}x_0 \varepsilon^{\lambda},$$

. . . .

Cela nous montre, par conséquent, que *l'accélération d'ordre quelconque d'un point X de la figure se compose de l'accélération de même ordre d'un point M quelconque et de l'accélération que prendrait le point X si la figure tournait effectivement autour du point M avec les vitesses et accélérations angulaires successives du mouvement véritable.*

Si maintenant nous choisissons, pour le point M, le centre instantané Ω dans la première équation, le centre des accélérations U dans la seconde, le centre des suraccélérations U_2 dans la troisième, ..., le centre U_n des accélérations d'ordre n dans la $n+1^{\text{ième}}$, ce qui naturellement déplace chaque fois l'origine, les premiers termes des seconds membres disparaîtront, en vertu de la définition même des centres U_n.

Il ne nous restera plus que des formules de la forme

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}(x_0 \varepsilon^{i\lambda}). \tag{53}$$

Donc *l'accélération d'ordre quelconque n, en chaque point de la figure, est la même que si, la vitesse et les accélérations angulaires successives restant identiques, le mouvement se produisait effectivement autour du centre des accélérations du $n^{\text{ième}}$ ordre.*

Ce théorème est obtenu par M. Resal dans son *Traité de Cinématique* (p. 314), par une méthode peut-être un peu moins simple que celle-ci.

Problème.

21. *On a, sur un plan, n points mobiles* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *respectivement animés des vitesses* $X_1V_1, X_2V_2, \ldots, X_nV_n$. *Pour chacun d'eux, on construit le triangle* OAY *directement semblable à* OXV, OA *étant une droite*

fixe, de longueur donnée. Pour un point Z, *ayant la vitesse* ZU, *on construit aussi le triangle* OAT, *directement semblable à* OZU. *Comment le point* Z *doit-il être déduit des points* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, *pour que* T *soit à chaque instant le centre de gravité des points* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$?

Ce problème fait l'objet de l'énoncé n° 72 de la *Nouvelle correspondance mathématique* (t. II, p. 63).

On le résout très-simplement en remarquant qu'on a

$$\frac{AY_p}{OA} = \frac{X_pV_p}{OX_p} = \frac{\frac{dx_p}{dt}}{x_p}, \quad AY_p = OA\,\frac{\frac{dx_p}{dt}}{x_p}.$$

De là

$$\Sigma AY_p = OA \sum \frac{\frac{dx_p}{dt}}{x_p}.$$

De même, nous avons

$$AT = OA\,\frac{\frac{dz}{dt}}{z}.$$

La condition que T soit le centre de gravité des points Y nous donne donc

$$n\,\frac{\frac{dz}{dt}}{z} = \frac{\frac{dx_1}{dt}}{x_1} + \frac{\frac{dx_2}{dt}}{x_2} + \ldots + \frac{\frac{dx_n}{dt}}{x_n}$$

ou

$$n\,\frac{dz}{z} = \frac{dx_1}{x_1} + \frac{dx_2}{x_2} + \ldots + \frac{dx_n}{x_n}.$$

intégrant

$$n \log \frac{z}{c} = \log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_n,$$

$$z = c\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Ainsi le point Z doit se déduire de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, de telle sorte que OZ soit la moyenne géométrique de $OX_1, OX_2, \ldots$ (en grandeur et en direction), multipliée par une constante géométrique.

SUR L'ANALYSE INDÉTERMINÉE DU TROISIÈME DEGRÉ ET SUR LA QUESTION 802 (*) (SYLVESTER);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

I. Considérons l'équation du troisième degré

$$f(x, y, z) = 0$$

d'une courbe en coordonnées rectilignes et homogènes; soit m_1 un point dont les coordonnées (x_1, y_1, z_1) sont rationnelles, et qu'il est facile de rendre entières; on a ainsi une première solution en nombres entiers de l'équation proposée. On peut obtenir de nouvelles solutions, en nombres entiers, de l'équation, par l'un des trois procédés suivants :

1° Si l'on mène la tangente à la courbe en m_1, cette droite rencontre la courbe en un autre point m dont les coordonnées sont encore rationnelles; par conséquent, d'une première solution de l'équation (1) on déduit, en général, une nouvelle solution (x, y, z) de cette équation, par les formules

$$f(x, y, z) = 0, \quad x\frac{df}{dx_1} + y\frac{df}{dy_1} + z\frac{df}{dz_1} = 0.$$

Cependant, lorsque la tangente est parallèle à l'une des asymptotes, ou lorsque la tangente est menée par un

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VI, p. 96.

point d'inflexion, on n'obtient pas de solutions nouvelles.

2° Si m_1 et m_2 désignent deux points dont les coordonnées (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) sont rationnelles, et par conséquent entières, on obtient, en général, une nouvelle solution, en prenant l'intersection de la sécante m_1m_2 avec la courbe, c'est-à-dire par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en tenant compte des relations

$$f(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad f(x_2, y_2, z_2) = 0.$$

3° Si l'on connaît cinq solutions de l'équation proposée, on obtient, en général, une sixième solution, en prenant le point d'intersection avec la courbe, de la conique passant par les cinq points qui correspondent aux solutions données; on peut d'ailleurs supposer plusieurs de ces points réunis en un seul, et en particulier tous les cinq réunis en un seul.

La méthode donnée par Fermat pour l'équation

$$(1) \qquad x^3 + y^3 = A z^3,$$

et par Lagrange, pour l'équation générale, revient au premier procédé. La méthode donnée par Cauchy pour l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 3Dxyz$$

revient au second (*).

II. Nous considérerons plus particulièrement, dans ce qui suit, l'équation (1). On doit supposer différents cas;

(*) Voir *Recherches sur les ouvrages de Léonard de Pise*, p. 49.

en effet, pour certaines valeurs de A, l'équation (1) est impossible, et ainsi, par exemple, pour

$$A = 1, 2, 3, 4, 5,$$

ainsi que pour d'autres valeurs générales, indiquées, pour la première fois, par M. Sylvester, dans la question 802.

Quant aux équations possibles, elles sont dites *monobasiques, bibasiques,* etc., suivant que l'on peut résoudre complétement l'équation proposée, par les formules qui résultent du premier procédé, en partant d'une, de deux, etc., solutions fondamentales. Il existe d'ailleurs des équations *monobasiques* et *bibasiques,* ainsi que nous le montrerons plus tard; cependant nous ajouterons que cette idée de classification et de résolution est due, je pense, à M. Sylvester, qui possède, depuis longtemps, un Mémoire inédit sur ce sujet intéressant.

III. Voici maintenant l'énoncé de la question 802 :

p et q désignant des nombres premiers respectivement des formes $18n+5$ *et* $18n+11$, *il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres suivants :*

$$p,\ 2p,\ 4p^2;\ q^2,\ 2q^2,\ 4q.$$

Soit d'abord à résoudre l'équation indéterminée

$$(1)\qquad x^3 + y^3 = pz^3,$$

dans laquelle p désigne un nombre premier de la forme $18n+5$, en nombres entiers et premiers entre eux. Le cube d'un nombre entier divisé par 9 donne pour reste $0, +1$ ou -1; donc, pour que l'équation (1) soit possible, il faut que z^3 soit divisible par 9, et, par suite, $z = 3z_1$. Cela posé, nous considérerons deux hypothèses, suivant que z est impair ou pair.

1° *z impair*. Alors $x-y$ et $x+y$ sont impairs; on a

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\,\mathrm{M}$$

et

$$4\,\mathrm{M}=3(x-y)^2+(x+y)^2;$$

par conséquent M est divisible par 3, et non par une puissance supérieure; de plus, les diviseurs premiers de M appartiennent à la forme $6h+1$; on doit donc poser, avec $z_1=ab$,

$$x+y=3^2pa^3,\quad \mathrm{M}=3\,b^3$$

et, par suite,

(2) $$4\,b^3=(x-y)^2+3\left(\frac{x+y}{3}\right)^2;$$

d'ailleurs b doit être de la forme $f^2+3\,g^2$, f et g étant premiers entre eux; on a ainsi

(3) $$\begin{cases} b=f^2+3\,g^2,\\ b^3=\mathrm{F}^2+3\,\mathrm{G}^2,\\ 4\,b^3=(\mathrm{F}-3\,\mathrm{G})^2+3(\mathrm{F}+\mathrm{G})^2,\end{cases}$$

et, en identifiant d'après (2) et (3),

$$\mathrm{F}+\mathrm{G}=\frac{x+y}{3}=3\,pa^3.$$

Mais le développement du cube de $f+g\sqrt{-3}$ donne

$$\mathrm{F}=f(f^2-9\,g^2),\quad \mathrm{G}=3\,g\,(f^2-g^2);$$

par suite,

$$f(f^2-9\,g^2)+3\,g(f^2-g^2)=3\,pa^3:$$

donc f serait divisible par 3, par suite b, et aussi x et y, que nous avons supposés premiers entre eux. Par conséquent, z ne peut être impair.

2° En supposant *z pair*, on aurait

$$\mathrm{M}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2,$$

et, puisque x et y sont impairs, il en est de même de M; on doit donc poser, avec $z = 6ab$,

$$x + y = 3^2 . 2^3 . pa^3, \quad M = 3b^3,$$

et, par suite,

$$\left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x + y}{6}\right)^2 = b^3.$$

Soient encore

$$b = f^2 + 3g^2, \quad b^3 = F^2 + 3G^2,$$

on en déduira

$$G = \frac{x + y}{6}, \quad \text{ou} \quad g(f^2 - g^2) = 4pa^3;$$

d'ailleurs $f^2 + 3g^2$ et $f^2 + 3g^2 - 4g^2 = f^2 - g^2$ sont impairs : donc g est pair, et l'on doit poser, avec $a = \alpha\beta\gamma$,

$$\left\{\begin{array}{l} g = 4p\alpha^3, \\ f + g = \beta^3, \\ f - g = \gamma^3; \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} g = 4\alpha^3, \\ f + g = p\beta^3, \\ f - g = \gamma^3. \end{array}\right.$$

On déduit de ces deux décompositions

$$\beta^3 - \gamma^3 = p(2\alpha)^3, \quad \text{ou} \quad \gamma^3 + (2\alpha)^3 = p\beta^3;$$

ces deux équations sont semblables à l'équation (1); on ramène donc l'équation proposée, dans laquelle l'une des inconnues contient le facteur 3^λ, à une autre semblable, dans laquelle l'une des inconnues ne contient plus que le facteur $3^{\lambda-1}$; en continuant de même, on ramènera l'équation proposée à une autre de même forme, dans laquelle aucune des inconnues ne sera divisible par 3. Donc l'équation proposée est impossible.

La démonstration précédente s'applique encore, en remplaçant le nombre premier $p = 18n + 5$ par le carré du nombre premier $q = 18n + 11$.

IV. Considérons maintenant l'équation

$$(4)\qquad x^3 + y^3 = 2^n A z^3,$$

dans laquelle, A étant impair, le coefficient $2^n A$ représente l'un des quatre nombres $2p$, $2q^2$, $4p^2$, $4q$. Nous supposerons deux cas, suivant que z ne sera pas ou sera divisible par 3; d'ailleurs, x et y sont impairs.

1° Lorsque z n'est pas divisible par 3, on arrive facilement à l'équation

$$f(f^2 - 9g^2) = 2^{n-1} A a^3;$$

$f^2 - 9g^2$ est impair, en même temps que $b = f^2 + 3g^2$, et l'on a l'une ou l'autre des deux décompositions

$$\begin{cases} f = 2^{n-1} A \alpha^3, \\ f + 3g = \beta^3, \\ f - 3g = \gamma^3; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} f = 2^{n-1} \alpha^3, \\ f + 3g = A\beta^3, \\ f - 3g = \gamma^3. \end{cases}$$

Ces deux décompositions conduisent aux deux équations

$$\beta^3 + \gamma^3 = 2^n A \alpha^3, \quad \text{ou} \quad A\beta^3 + \gamma^3 = 2^n \alpha^3,$$

impossibles suivant le module 9, puisque, pour la première, les indéterminées α, β et γ ne sont pas divisibles par 3.

2° Lorsque z est divisible par 3, on arrive, en posant $z = 3ab$, à l'équation

$$g(f^2 - g^2) = 2^{n-1} A a^3,$$

et, puisque $f^2 - g^2$ est impair, à l'une des décompositions

$$\begin{cases} g = 2^{n-1} A \alpha^3, \\ f + g = \beta^3, \\ f - g = \gamma^3, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} g = 2^{n-1} \alpha^3, \\ f + g = A\beta^3, \\ f - g = \gamma^3; \end{cases}$$

la seconde décomposition conduit à une équation déjà

reconnue impossible ; la première conduit à l'équation

$$\beta^3 - \gamma^3 = 2^n A \alpha^3.$$

Celle-ci est de même forme que l'équation (4) ; mais l'indéterminée du second membre contiendra un facteur 3 en moins. On conclura, comme pour l'équation (1), que l'équation (4) est impossible à résoudre en nombre entiers.

Remarque I. — En rapprochant les résultats de M. Sylvester avec ceux d'une Note précédente (*), on en déduit le théorème suivant :

L'équation

$$xy(x+y) = Az^3$$

est impossible, en nombres rationnels, en exceptant les valeurs égales ou nulles des indéterminées, dans les cas suivants :

$$A = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 18,\ 36,\ p,\ 2p,\ 4p^2,\ q^2,\ 2q^2,\ 4q,$$

p désignant un nombre premier de la forme $18n+5$, *et q un nombre premier de la forme* $18n+11$.

En faisant $y=1$, on obtient plusieurs théorèmes concernant les nombres triangulaires, et le produit de deux nombres consécutifs ; en faisant $y = x+1$, on en déduira ceux qui concernent les nombres

$$x(x+1)(2x+1), \quad \text{et} \quad 2x(2x+1)(2x+2).$$

Remarque II. — De même, en rapprochant les résultats obtenus par Fermat et par M. Genocchi, sur les

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 425.

nombres congruents (*), avec ceux d'une Note précédente (**), on en déduit le théorème suivant :

L'équation

$$xy(x+y)(x-y) = Az^2$$

est impossible, en nombres rationnels, dans les cas suivants :

$$A = 1, 2, \quad p, 2q,$$

p désignant un nombre premier de la forme $8n+3$, *et q un nombre premier de la forme* $8n+5$.

On observera que les résultats généraux, obtenus par MM. Genocchi et Sylvester, constituent des progrès importants, pour arriver à la solution de deux problèmes posés depuis près de *vingt siècles*.

AU SUJET DES CAS D'IMPOSSIBILITÉ D'UNE SOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION $x^3 \pm a = y^2$;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Parmi les nombres contenus dans le tableau par lequel se termine la page 379 du tome XVII, 2e série, des *Nouvelles Annales*, il s'en est glissé un inexact : c'est — 359. Les lecteurs que cette question intéresse ont d'ailleurs pu s'en apercevoir eux-mêmes aisément; car, d'après la règle que j'ai posée (p. 376, ligne 14) pour les nombres de cette catégorie, on doit, pour obtenir les valeurs de a

---

(*) *Annali di Scienze matematiche*, etc., da B. Tortolini, t. VI, p. 299. — *Il Cimento, Rivista di Scienze*, etc., t. VI, p. 677. Turin, 1855.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 433.

en tête desquelles a été écrit le nombre fautif — 359, commencer par écrire la suite des nombres, positifs et négatifs, qui appartiennent aux formes

$$8b+3,\quad 8b+5,\quad 8b+7,$$

savoir :

..	−13	−11	−9	−5	−3	−1	3	5	7	11	13	...

en former les cubes respectifs, et retrancher de ceux-ci les puissances consécutives de 4 à partir de la deuxième, ce qui donne, respectivement, les séries, indéfinies tant dans le sens horizontal que dans le sens vertical :

...	−2213	−1347	−745	−141	−43	−17	+11	109	327	1315	2181	...
...	−2261	−1395	−793	−189	−91	−65	−37	61	279	1267	2133	...
...	.....	......	−985	−381	−283	−257	−229	−131	87	1075	1941	...
...	......	......	−1753	−1149	−1051	−1025	−997	−899	−681	307	1173	...
...	......	......	......	......	......	......	.....	.....	.....	.....	.....	...

Ce tableau, plus complet que celui de la page 379 précitée, contient d'ailleurs tous les nombres inscrits à cette page, sauf le nombre — 359, qui est égal au cube, diminué de 16, du nombre — 7, dont la forme $8b+1$ est précisément la seule à exclure de la catégorie dans laquelle il figure.

Quant aux nombres ou valeurs de a, cités au même endroit (ligne 4, *en remontant*), ils ont été obtenus, conformément à la règle posée p. 376, § II, 1°, en formant les cubes des nombres négatifs et positifs des formes $8b+1$, $8b+3$, $8b+7$, et en retranchant 4 de chacun de ces cubes.

Ceux de la troisième catégorie (ligne dernière) ne peuvent donner lieu à aucune difficulté ni méprise provenant d'une interprétation incorrecte du texte de la règle qui s'y rapporte à l'endroit cité.

CORRESPONDANCE.

1. M. *C. Landré*, ancien répétiteur de Mathématiques à l'Université d'Utrecht, actuellement professeur à Dordrecht (Pays-Bas), nous communique une Note assez étendue sur l'application des coordonnées *trilinéaires* à diverses questions relatives à la distance d'un point à une droite, et à la distance de deux droites parallèles, définies par des équations données.

Les observations et solutions de M. Landré sont sans aucun doute bien exactes; mais les formules en coordonnées trilinéaires, auxquelles ces questions conduisent, sont loin d'être aussi simples que celles qu'on obtient, en résolvant les mêmes questions, au moyen des coordonnées *cartésiennes*.

2. M. *A. Goldenberg*, professeur de Mathématiques à Moscou, donne de la question 1255 (*voir* p. 430) une solution entièrement fondée sur la proportionnalité des côtés homologues des triangles semblables, et il en conclut ce théorème :

Soient M *un point pris dans le plan d'un triangle* ABC, *à une distance* R_1 *du centre du cercle circonscrit au triangle, et* P_1, P_2, P_3 *les pieds des perpendiculaires abaissées du point* M, *sur les côtés* BC, CA, AB; *le rapport de l'aire du triangle* $P_1 P_2 P_3$ *à celle du triangle* ABC *est exprimé par la formule* $\frac{R^2 - R_1^2}{4R^2}$, *dans laquelle* R *désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle.*

Quand $R_1 = R$, l'aire du triangle $P_1 P_2 P_3$ s'annule, ou, ce qui revient au même, les points P_1, P_2, P_3 sont en ligne droite; c'est la droite dite de *Simpson*.

3. Une lettre anonyme, qui nous est adressée d'une ville du Danemark, contient la solution suivante de la question du Concours d'agrégation, déjà résolue (numéro de juillet, p. 516) :

« *On donne la longueur de la bissectrice de l'angle* A *d'un triangle* ABC, *et la somme des deux côtés* AB, AC *qui comprennent cet angle : on demande d'étudier la variation de la surface du triangle, ainsi que les variations de l'angle* A *et des côtés* AB, AC.

» Soient y, z les deux côtés de l'angle A ; α la bissectrice ; D le point où elle rencontre BC ; s la somme $y+z$, et d la différence $y-z$, en supposant $y \geq z$.

» Les surfaces des triangles ADB, ADC, et de leur somme S = ABC, donnent l'équation

$$\frac{1}{2}\alpha(y+z)\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}yz\sin A = yz\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

et la solution immédiate

$$\cos\frac{A}{2} = \frac{\alpha s}{2yz} = \frac{2\alpha s}{s^2-d^2};$$

$$S = \frac{1}{2}\alpha s \sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2}\alpha s\sqrt{1-\frac{4\alpha^2 s^2}{(s^2-d^2)^2}};\quad \left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}(s \pm d).$$

» La discussion est très-facile. L'angle A et la surface S obtiennent leur *maximum* pour

$$d = 0;\quad \cos\frac{A}{2} = \frac{2\alpha}{s};\quad S = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{s^2-4\alpha^2};\quad y = z = \frac{s}{2};$$

et leur minimum pour

$$\cos\frac{A}{2} = 1;\quad A = 0;\quad d^2 = s^2 - 2\alpha s;$$

$$S = 0;\quad \left.\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 - 2\alpha s}\right).$$

» Pour $\alpha = \frac{s}{2}$, il n'y a qu'une seule solution du problème; et, pour $\alpha > \frac{s}{2}$, aucune. »

4. *Extraits d'une lettre de M. Catalan.*

» 1° La *conique des neuf points* (*voir* p. 281) est mentionnée (sauf la dénomination) dans le *Manuel des Candidats à l'École Polytechnique* (t. I, p. 479); le centre de cette conique est le milieu commun des droites qui joignent les milieux des côtés opposés, ou les milieux des diagonales, du quadrilatère formé par les points donnés (*loc. cit.*) ».

» 2° *Remarque sur le nombre* 10 (*voir* p. 429) :

» Le nombre 10 est la somme des carrés des deux nombres impairs consécutifs; le carré de 10 est la somme des carrés de deux nombres pairs consécutifs; d'autres nombres jouissent-ils des mêmes propriétés (*)? »

5. M. *Albert Lacazette*, élève du Lycée de Bordeaux, démontre, par un calcul assez simple, la proposition 1276 (*voir* p. 477), et il observe qu'on démontrerait de même que la puissance d'un point quelconque O de l'espace, par rapport à la sphère circonscrite à un tétraèdre ABCD, a pour expression

$$\frac{a^2\,\mathrm{OBCD} + b^2\,\mathrm{OACD} + c^2\,\mathrm{OABD} - d^2\,\mathrm{OABC}}{\mathrm{ABCD}},$$

a, b, c, d étant les longueurs des droites OA, OB, OC, OD; et les volumes OBCD, ... recevant des signes convenables.

6. La question 1265 a été résolue par M. *Eugène*

(*) *Voir*, p. 521, une réponse à cette question.

Delmas, élève du lycée de Lyon; la question 1271, par M. *Cottereau*, élève du lycée Charlemagne; et les questions 1271, 1274, par M. *Pisani*.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Ricerche sulle equazioni algebrico-differenziali, Memoria di *F. Casorati*, a Pavia. (Estratto dagli *Annali di Matematica pura ed applicata*. Serie II^a, tomo IX.) — Milano, 1878. Tip. Bernardoni.

2. Vorlesungen über lineare differential-Gleichungen; von prof. *Simon Spitzer*. — Wien. Druck und Verlag von Carl. Gerold's Sohn, 1878.

3. American Journal of Mathematics pure and applied. — Editor in chief, J.-J. Sylvester, LL. D. F. R. S., Corr. Mem. Inst. of France. Associate editor in charge, William E. Story, Ph. D. (Leipzic). With the cooperation of *Benjamin Pierce*, LL. D. F. R. S., professor of Mathematics in Harvard University, in Mechanics. *Simon Newcomb*, LL. D. F. R. S., Corr. Mem. Inst. of France, superintendent of the American Ephemeris in Astronomy, and *H. A. Rowland*, C. E., in Physics. Published under the auspices of the Johns Hopkins University. Volume I. Number 3.

Baltimore: printed for the editors by John Murphy and Co. B. Westerman and Co., D. Van Nostrand, New-York. Trübner and Co., London. A. Williams and Co., Boston. Ferree and Co., Philadelphia. A. Asher and Co., Berlin. Gauthier-Villars, Paris, 1878.

Table des matières du n° 3.

Théorie des fonctions numériques simplement périodiques (*suite*). Par *Édouard Lucas*, professeur au lycée Charlemagne, Paris.

The Elastic. Arch. By *Henry T. Eddy*, Cincinnati, O.

Researches in the lunar theory, II., (*continued*). By *G. W. Hill*, Nyach Turnpile, N. Y.

Bibliography of Hyper-Space and non-Euclidean Geometry. By *George Bruce Halsted*, tutor in Princeton College, N. J.

Some remarks on a passage in professor Sylvester's paper as to the Atomic theory. A letter from professor *J. W. Mallet*, of the University of Virginia.

Notes :

I. Historical data concerning the discovery of the Law of Valence.

II. On the mechanical description of the Cartesian. By *J. Hammond*, Bath, England.

III. A new solution of Biquadratic equations. By *T. S. E. Dixon*, Chicago, Ills.

IV. On a short Process for solving the irreducible case of Cardan's method. By *Otis H. Kendall*, assistant professor in the University of Pennsylvania.

V. An extension of Taylor's theorem. By *J. C. Glashan*, Ottawa, Canada.

4. Éléments de Géométrie, comprenant des notions sur les courbes usuelles et de nombreux exercices; par F. I. C. (*). 3e édition, 1878, suivie d'un appendice, à part; il en sera rendu compte.

(*) Chez les éditeurs : Tours, Alfred Mame et fils, imprimeurs-libraires. Paris, Poussielgue, frères, rue Cassette, 17. — Propriété de l'Institut des Frères des écoles chrétiennes.

NOTE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS ET POSITIFS DU SYSTÈME DES DEUX ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES

$$x = 4y^2 + 1, \quad x^2 = z^2 + (z+1)^2;$$

1. La question posée par M. Catalan (p. 518, 2°) conduit à ces équations; car, en nommant $2x$ un nombre remplissant les conditions énoncées, et y, z d'autres nombres entiers, on aura

$$2x = (2y-1)^2 + (2y+1)^2 = 8y^2 + 2;$$

$$(1) \qquad x = 4y^2 + 1.$$

$$4x^2 = (2z)^2 + (2z+2)^2 = 8z^2 + 8z + 4;$$

$$(2) \qquad x^2 = z^2 + (z+1)^2.$$

2. L'équation

$$(2) \qquad x^2 = z^2 + (z+1)^2$$

donne, en supposant z impair,

$$x = \alpha^2 + \beta^2, \quad z = \alpha^2 - \beta^2, \quad z + 1 = 2\alpha\beta,$$

où α et β désignent des nombres entiers, premiers entre eux, et liés par la relation

$$(3) \qquad \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2 = 1,$$

qui exige que α soit pair et β impair.

D'autre part, chacune des deux expressions $\alpha^2 + \beta^2$ et $4y^2 + 1$ représentant la valeur de x, on a

$$(4) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 4y^2 + 1,$$

et en retranchant, membre à membre, l'équation (3) de l'équation (4), il vient

$$2\alpha^2 - 2\alpha\beta = 4y^2; \quad \alpha(\alpha - \beta) = 2y^2.$$

Mais α et $\alpha - \beta$ sont premiers entre eux; de plus, α est pair et $\alpha - \beta$ impair; donc $\alpha = 2p^2$, $\alpha - \beta = q^2$,

$\beta = 2p^2 - q^2$, où p et q sont des nombres entiers.

Au moyen de la substitution de $2p^2$ et $2p^2 - q^2$ à α et β, l'équation (3) devient

$$(2p^2 - q^2)^2 + 4p^2(2p^2 - q^2) - 4p^4 = 1,$$

ou

$$q^4 - 8p^2q^2 + 8p^4 = 1; \quad q^2 = 4p^2 \pm \sqrt{8p^4 + 1}.$$

Pour que q^2 soit rationnel, il faut que $8p^4 + 1$ soit le carré d'un nombre impair $2r + 1$, c'est-à-dire qu'on ait

$$8p^4 + 1 = 4r^2 + 4r + 1; \quad 8p^4 = 4r^2 + 4r; \quad p^4 = \frac{r(r+1)}{2}.$$

Or, *aucun nombre triangulaire, excepté l'unité, n'est égal à un bicarré* (*) : donc $r = 1$, $p^2 = 1$; il s'ensuit

$$q^2 = 1, \ \alpha = 2, \ \beta = 1, \ z = 3, \ y = 1, \ x = 5;$$

d'où

$$2x = 10.$$

3. Si z était pair, on aurait

$$x = \alpha^2 + \beta^2, \quad z + 1 = \alpha^2 - \beta^2, \quad z = 2\alpha\beta, \quad \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta = 1,$$

α, β premiers entre eux, β pair et α impair.

Et, à cause de $\alpha^2 + \beta^2 = 4y^2 + 1$,

$$2\beta^2 + 2\alpha\beta = 4y^2, \quad \beta(\beta + \alpha) = 2y^2.$$

Par suite,

$$\beta = 2p^2, \quad \beta + \alpha = q^2, \quad \alpha = q^2 - 2p^2;$$

$$(q^2 - 2p^2)^2 - 4p^4 - 4p^2(q^2 - 2p^2) = 1,$$

ou

$$q^4 - 8p^2q^2 + 8p^4 = 1, \quad q^2 = 4p^2 \pm \sqrt{8p^4 + 1},$$

et, comme précédemment,

$$p^2 = 1, \quad q^2 = 1.$$

De là,

$$\alpha = -1, \quad \beta = 2, \quad z = -4, \quad y^2 = 1, \quad x = 5.$$

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, éd. de 1830, t. II, p. 7.

Ainsi, on a encore $2x = 10$; il en faut conclure que 10 est le seul nombre qui jouisse de la double propriété d'être la somme des carrés de deux nombres impairs consécutifs, et d'avoir pour carré la somme des carrés de deux nombres pairs consécutifs. G.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES

Question 1286

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 432);

PAR M. P. TERRIER.

Deux droites de même longueur, OA, OB, *et un point* P *sont donnés, une droite mobile, passant par le point* P, *coupe* OA *en* A_1 *et* OB *en* B_1. *On décrit deux cercles ayant pour centres* A_1 *et* B_1, *et passant respectivement par* A *et* B. *Trouver le lieu géométrique des points communs à ces deux cercles.* (DROZ.)

Les droites a et b tangentes au cercle OA en A et B, et la corde MN (réelle ou idéale) commune aux cercles A_1 et B_1, sont les axes radicaux des cercles O, A_1 et B_1, considérés deux à deux. La corde MN passe donc par le point d'intersection Q des tangentes a et b, et la puissance de ce point, par rapport aux points M, N, est égale au carré de QA. Le lieu des points M, N est donc un cercle qui a son centre au point P, avec lequel les centres A_1 et B_1 sont alignés.

Note. Autres solutions de MM. Moret-Blanc; Fillon, répétiteur au lycée du Havre; Jean Griess; C. Vagane; Fauquembergue.

Question 1290

(voir 2e série, t. XVII, p. 479);

PAR M. J. DE VIRIEU,

Professeur à Lyon.

Soient r, r_1, r_2, r_3 les rayons des cercles tangents aux côtés d'un triangle; démontrer que

$$a+b+c=3(r^{-1}r_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1^{-1}r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2^{-1}r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2r_3^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

(T. MITCHESON, B. A.; L. C. P.)

Les formules connues

$$s=rp,\quad s=r_1(p-a),$$
$$s=r_2(p-b),\quad s=r_3(p-c),\quad s=(rr_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}}$$

donnent

$$p=(r^{-1}r_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}},\quad p-a=(rr_1^{-1}r_2r_3)^{\frac{1}{2}},$$
$$p-b=(rr_1r_2^{-1}r_3)^{\frac{1}{2}},\quad p-c=(rr_1r_2r_3^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Si de trois fois la première de ces quatre équations on retranche la somme des trois dernières, on a

$$a+b+c=3(r^{-1}r_1r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1^{-1}r_2r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2^{-1}r_3)^{\frac{1}{2}}-(rr_1r_2r_3^{-1})^{\frac{1}{2}}.$$

Note. Solutions analogues de MM. Ch. *Cochez;* Moret-Blanc; C. Boell, élève du lycée du Havre; E. Fauquembergue, maître répétiteur au Lycée de Saint-Quentin; Robaglia, maître répétiteur au lycée d'Alger.

Question 1292

(voir 2e série, t. XVII, p. 480);

PAR M. C. H., ABONNÉ.

Démontrer qu'il est impossible de résoudre en nombres entiers aucune des trois équations

$$(1)\quad x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6+x_5^6+x_6^6+x_7^6=9.x_8+8,$$
$$(2)\quad x^3+y^6=9.z+7,$$
$$(3)\quad x^3+y^6=7.z+5.$$

(LAISANT.)

1° Il est évident, d'après l'équation (1), que les sept nombres $x_1, x_2, \ldots, x_7$ ne sont pas tous multiples de 3; car, dans ce cas, leur somme serait multiple de 9.

Or, la sixième puissance d'un nombre non divisible par 3, étant égale à un multiple de 9, augmenté de l'unité, le premier membre de l'équation (1) est nécessairement de la forme $9.n + r$, où r représente un entier moindre que 8. Donc l'équation (1) est impossible en nombres entiers.

2° Remarquons de même que, dans l'équation (2), les nombres x, y ne peuvent être tous deux multiples de 3.

Si aucun de ces nombres n'admet 3 comme facteur, on aura

$$x^3 = 9m \pm 1, \quad y^6 = 9.n + 1;$$
$$x^3 + y^6 = 9z + 2, \quad \text{ou} \quad x^3 + y^6 = 9z.$$

En supposant x divisible par 3, on a

$$x^3 + y^6 = 9z + 1.$$

Enfin, si y est multiple de 3, il en résulte

$$x^3 + y^6 = 9z \pm 1.$$

Donc, en représentant par r un nombre moindre que 9, l'équation $x^3 + y^6 = 9z + r$ n'admet de solutions entières que pour $r = 0, = 1, = 2, = 8$.

3° Le cube d'un nombre premier avec 7, étant égal à un multiple de 7, augmenté ou diminué de l'unité, le premier membre, $x^3 + y^6$, de l'équation (3) ne peut avoir que l'une de ces formes :

$$7z, \quad 7z + 1, \quad 7z + 2, \quad 7z + 6.$$

Et, par conséquent, aucune des équations

$$x^3 + y^6 = 7z + 3, \quad = 7z + 4, \quad = 7z + 5$$

n'admet de solution entière.

Note. La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

QUESTIONS.

1295. Démontrer :

1° Que, si une solution de l'équation indéterminée

$$u^3 + v^3 + x^3 + y^3 = 0$$

est donnée par l'égalité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = 0,$$

on obtient une nouvelle solution en faisant

$$u = \alpha(\beta + \gamma + \delta) - \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2,$$
$$v = \beta(\alpha + \gamma - \delta) - \alpha^2 - \gamma^2 - \delta^2,$$
$$x = \gamma(\alpha - \beta + \delta) + \alpha^2 - \beta^2 - \delta^2,$$
$$y = \delta(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2.$$

2° Que, si l'on part de cette seconde solution pour en obtenir une troisième par le même procédé, on retombera, à un facteur commun près, sur les valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

(S. Realis.)

1296. Si les égalités

$$A\alpha^3 + B\beta^3 + C\gamma^3 = 0, \quad A\alpha'^3 + B\beta'^3 + C\gamma'^3 = 0$$

représentent deux solutions connues, distinctes, de l'équation

$$Ax^3 + By^3 + Cz^3 = 0,$$

une troisième solution sera donnée par les formules

$$x = B\beta\beta'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + C\gamma\gamma'(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma),$$
$$y = C\gamma\gamma'(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + A\alpha\alpha'(\beta\alpha' - \beta'\alpha),$$
$$z = A\alpha\alpha'(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + B\beta\beta'(\gamma\beta' - \gamma'\beta).$$

(S. Realis.)

1297. Décomposer le quadruple et le carré de $4p^6 + 27q^6$ en une somme de deux cubes.

(Édouard Lucas.)

1298. Décomposer le nombre $x^{12} - 9.y^{12}$, et son double, en une somme de deux cubes.

(Édouard Lucas.)

1299. La somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (Édouard Lucas.)

1300. La somme des x premiers nombres triangulaires n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (Édouard Lucas.)

1301. Dans un segment d'une conique quelconque, inscrire le trapèze maximum; la corde qui limite le segment devant être une des bases du trapèze.

(F. Gabriel-Marie.)

1302. Dans une conique à centre, inscrire le quadrilatère maximum ayant pour un de ses côtés un diamètre donné, et pour côté opposé une corde parallèle à une droite donnée. (F. Gabriel-Marie.)

1303. Trouver toutes les solutions entières de l'équation $x^2 + 7x = 2y(y + 3)(y^2 + 3y + 5)$.

(Lionnet.)

1304. La somme des distances du cercle circonscrit, aux deux côtés AB, AC du triangle inscrit ABC, est égale à la corde menée par le point C, perpendiculairement à AC dans le cercle décrit sur DC, comme diamètre; D étant le milieu de l'arc BC. (A. Cambier.)

1305. On donne un faisceau F_n de courbes de l'ordre n et une droite d; chaque point D de d détermine une

courbe de F_n. Démontrer que l'enveloppe de la tangente en D, à la courbe déterminée par ce point, est de la classe $2n - 1$, de l'ordre $4(n-1)$; que la droite d est une tangente multiple de l'ordre $2(n-1)$; que la courbe a $4(n-2)(n-3)$ points doubles, $3(2n-3)$ points de rebroussement, qu'elle n'a aucun point d'inflexion; que les tangentes en $(n-1)$ points de rebroussement passent par les $(n-1)$ points qui correspondent à l'infini dans l'involution que les courbes du faisceau F_n marquent sur la droite d.

Examiner le cas où k points de la base de F_n se trouvent sur la droite d.

Construire la courbe dans le cas où $n = 2$, en supposant : 1° que les quatre points de la base du faisceau des coniques se trouvent d'un même côté de la droite d; 2° que trois de ces points se trouvent d'un côté de d, et le quatrième de l'autre côté. (E. Dewulf.)

1306. On donne une conique C_2, et trois points A, B, C. Par chaque point P de C_2 passe une conique circonscrite au triangle ABC, et tangente à C_2 en P, et chacune de ces coniques coupe la conique fixe en deux autres points M, N.

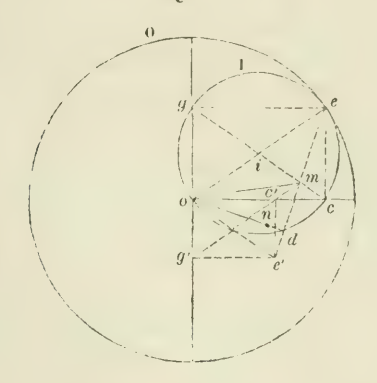
L'enveloppe de la droite MN est de la quatrième classe, du sixième ordre; elle n'a pas de point d'inflexion; elle est doublement tangente aux côtés du triangle ABC; elle a quatre points doubles, six points de rebroussement. Les tangentes de rebroussement sont les tangentes à C_2, aux six points où les côtés du triangle ABC coupent cette conique. (E. Dewulf.)

CONSTRUIRE LES AXES D'UNE ELLIPSE, ÉTANT DONNÉS DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

PAR M. A. MANNHEIM (*).

1. Faisons rouler (*fig.* 1) une circonférence I de centre i, dans l'intérieur d'une circonférence O de centre o dont le rayon est double du rayon de la pre-

Fig. 1.



mière. Un point quelconque de la circonférence I décrit alors un diamètre de la circonférence O. Je dis qu'*un point quelconque du plan de la circonférence* I *décrit une ellipse.*

Soit m le point décrivant, menons le diamètre mi: pendant le roulement, les extrémités c, g de ce diamètre décrivent les droites oc, og. On a alors un seg-

(*) J'ai retrouvé cette courte Note en réunissant les matériaux d'un Ouvrage que je me propose de publier sous le titre de *Géométrie cinématique*.

ment *cg* de grandeur constante, dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires ; le point *m* de ce segment décrit une ellipse (m), dont les axes sont en direction *oc* et *og* et dont les demi-axes ont pour longueurs *mc*, *mg*.

La normale en *m* à l'ellipse (m) passe par le point de contact *e* des circonférences I et O. Cette normale *em* rencontre la circonférence I en *d*, et la droite *od*, qui est perpendiculaire à *em*, est parallèle à la tangente en *m* à l'ellipse. *Le diamètre od est donc, en direction, conjugué du diamètre om.*

Cherchons la longueur du diamètre conjugué de *om*. Pour cela, considérons le point *m* comme un point du segment *ed*. Pendant le roulement de I, ce segment reste de grandeur constante et se déplace dans l'angle *eod* ; le point *e* décrit la droite *eo* et le point *d*, la droite *od*. Lorsque le point *e* est venu en *o*, la droite *em* coïncide avec la droite *od* et le point *m* est venu en *n*, de façon que *on* soit égal à *em*. Mais nous avons vu que *od* est la direction conjuguée de *om* ; donc *le demi-diamètre conjugué de om est égal à em.*

D'après cela, si l'on donne les deux demi-diamètres conjugués *om*, *on*, on opérera ainsi, pour avoir les axes de l'ellipse (m) :

Du point m, on abaisse sur le diamètre no la perpendiculaire md. On porte sur cette droite le segment em égal au demi-diamètre no. Sur oe, comme diamètre, on décrit une circonférence et l'on trace le diamètre im de cette circonférence : les droites oc et og sont les directions des axes de (m) et les segments mc, mg sont les longueurs des demi-axes.

2. Si, au lieu de porter *no* en *me*, on porte le même segment en sens inverse en *me'*, on achèvera la con-

struction, comme précédemment, en décrivant une circonférence sur oe' comme diamètre. L'ellipse (m) peut, en effet, être engendrée par le point m considéré comme marqué sur la droite $g'c'$, qui est égale à la demi-différence de ses axes. On a, en même temps,

$$mc' = mc \quad \text{et} \quad mg' = mg.$$

Puisque mc' est parallèle à oe, les droites oe, oe' sont également inclinées sur les axes de l'ellipse (m).

Nous venons de voir que les segments oe, oe' sont respectivement égaux à la somme et à la différence des demi-axes de cette courbe; nous retrouvons alors cette construction, donnée par M. Chasles dans son *Aperçu historique*, p. 362, pour résoudre le problème dont nous nous occupons :

« *Par l'extrémité* A *d'un des deux demi-diamètres donnés, on mènera une droite perpendiculaire au second demi-diamètre; on portera sur cette droite, à partir du point* A, *deux segments égaux à ce second demi-diamètre;*

» *On joindra, par deux droites, les extrémités de ces segments au centre de la courbe;*

» *On divisera en deux également, par deux nouvelles droites, l'angle que ces deux premières feront entre elles et son supplément;*

» *Ces deux nouvelles droites seront, en direction, les deux axes principaux de l'ellipse;*

» *La somme des deux premières droites sera égale au grand axe, et leur différence sera égale au petit axe.* »

3. Pour arriver à la construction 1, nous n'avons pas eu besoin de recourir aux propriétés des diamètres con-

jugués d'une ellipse. Ces propriétés peuvent, au contraire, s'en déduire.

Dans la circonférence I, on a

$$mg \times mc = me \times md = on \times om \sin nom.$$

Ainsi : *le produit de deux diamètres conjugués par le sinus de l'angle qu'ils comprennent est égal au produit des axes de l'ellipse.*

Dans la circonférence I, la somme des carrés des distances du point m aux extrémités d'un diamètre quelconque est constante. On a alors

$$\overline{mo}^2 + \overline{me}^2 = \overline{mc}^2 + \overline{mg}^2,$$

c'est-à-dire que *la somme des carrés de deux diamètres conjugués de l'ellipse* (m) *est égale à la somme des carrés des axes de cette courbe.*

4. Nous allons montrer comment on peut arriver à la construction précédente par une tout autre voie, et sans avoir besoin de connaître la construction de la normale en un point de la ligne décrite pendant le roulement d'une courbe sur une autre.

Appelons toujours om, on (*fig.* 2) les deux demi-diamètres conjugués donnés. Sur on, comme diamètre, décrivons une circonférence de cercle et menons ol perpendiculairement à on.

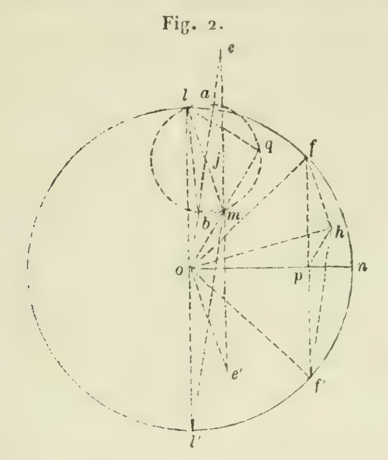
Si nous construisons des triangles tels que fph homothétiques au triangle lom, le lieu des points h est une ellipse (m) qui a pour diamètres conjugués om et on.

(On peut remarquer qu'on aura la même ellipse, en construisant des triangles tels que $f'ph$, homothétiques au triangle $l'om$.)

Au point f du cercle correspond le point h de l'ellipse m, et, comme fh rencontre la circonférence en un

autre point que f, on aura sur cette droite un autre point de l'ellipse (m). Si alors nous menons à la circonférence de centre o une tangente parallèle à lm, cette

Fig. 2.



droite rencontrera la circonférence en deux points infiniment voisins auxquels correspondront, sur l'ellipse, deux points infiniment voisins : en d'autres termes, la tangente au cercle o, menée parallèlement à lm, est aussi tangente à l'ellipse (m).

De la même manière, nous pouvons dire qu'une tangente à la circonférence o, menée parallèlement à $l'm$, est tangente à (m).

Les droites ml, ml', étant parallèles à des tangentes communes à une ellipse et à un cercle concentriques, sont également inclinées sur les axes de l'ellipse (m).

Comme les droites lm, $l'm$ sont égales et parallèles à oe, oe' obtenus comme précédemment, nous retrouvons ainsi la première partie de la construction de M. Chasles.

Cherchons les axes de l'ellipse (m).

Faisons tourner le quadrilatère $ophf$ autour de o, de façon que of vienne coïncider avec ol. Le point p vient

sur la circonférence décrite sur ol comme diamètre; le côté ph passe par le point q, où cette circonférence est rencontrée par om, parce que l'angle hpf est égal à l'angle mol, et que l'un des côtés de cet angle passe par l; enfin le point h sera un point du segment capable de l'angle fhp décrit sur lq.

Quel que soit le point f pris sur la circonférence o, on aura un point correspondant sur l'ellipse (m), et, en répétant ce que nous venons de dire, nous ramènerons ce point de l'ellipse sur le segment capable dont nous venons de parler. Ce segment contient alors le point m, et, comme l'angle lqm est droit, on l'obtient simplement en décrivant une circonférence sur lm comme diamètre.

Les distances du point o aux points de cette dernière circonférence sont respectivement égales aux longueurs des demi-diamètres de l'ellipse (m). Menons alors du point o la droite oj passant par le centre j de la circonférence décrite sur lm; cette droite rencontre cette circonférence en a et b : les segments oa et ob sont alors l'un maximum, l'autre minimum; par suite, le segment oa est le demi-grand axe de (m) et ob le demi-petit axe de cette courbe. On voit aussi que ml, ou son égal oe', est égal à la différence des demi-axes de l'ellipse (m).

Si nous avions considéré le quadrilatère $of'ph$ nous aurions trouvé de la même manière que ml', ou son égal oe, est égal à la somme des demi-axes de (m). Nous retrouvons ainsi la deuxième partie de la construction de M. Chasles.

Joignons le point b aux points l et m. Les droites bl, bm sont également inclinées sur lm et oj. Comme cette dernière droite est parallèle à ml', on voit que bl et bm sont également inclinés sur ml, ml' et donnent alors la direction des axes de (m). Nous avons, par suite, la construction suivante :

On mène, à partir du point o, une droite ol égale et perpendiculaire à on. Sur ml, comme diamètre, on décrit une circonférence. On joint le point o au centre j de cette circonférence. Cette droite coupe la circonférence j aux points a et b : les segments oa, ob sont les longueurs des demi-axes de l'ellipse (m), et les droites lb, mb sont parallèles aux axes de cette courbe.

Cette construction revient à la construction que nous avons donnée précédemment, et qu'on obtient en décrivant une circonférence sur *oe'* comme diamètre.

5. En faisant usage de la circonférence *j*, on arrive à un certain nombre de théorèmes. Nous n'énoncerons que les deux suivants, pour ne pas nous écarter de notre sujet, en appelant correspondantes des droites telles que *of* et *oh*.

Les axes de l'ellipse (m) font respectivement des angles égaux avec les diamètres correspondants de la circonférence o.

Le diamètre de l'ellipse (m), qui fait un angle maximum avec le diamètre correspondant de la circonférence o, est moyen proportionnel entre les axes de l'ellipse (m), etc., etc., etc.

6. Les axes de l'ellipse (*m*) étant les bissectrices des angles formés par *oe* et *oe'* rencontrent la circonférence circonscrite au triangle *oee'* aux points où cette courbe est coupée par la tangente en *m* à (*m*), puisque cette droite est la perpendiculaire élevée sur le milieu de *ee'*. Cette remarque donne une construction de la direction des axes de (*m*) et conduit à ce théorème connu :

Le produit des segments comptés sur la tangente en m à (m), entre ce point et les axes de la courbe, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente.

SUR UN THÉORÈME DE M. LIOUVILLE, CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN BICARRÉS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Liouville a démontré, dans son cours au Collége de France, qu'un nombre quelconque est une somme de 53 bicarrés, au plus. On peut abaisser cette limite à 41. En effet, il résulte de l'identité des deux expressions

$$6(x^2+y^2+z^2+u^2)^2$$

et

$$(x+y)^4+(x-y)^4+(x+z)^4+(x-z)^4+(x+u)^4+(x-u)^4$$
$$+(y+z)^4+(y-z)^4+(y+u)^4+(y-u)^4+(z+u)^4+(z-u)^4$$

que le sextuple du carré d'un nombre quelconque est une somme de 12 bicarrés, puisque l'on sait qu'un nombre quelconque est une somme de 4 carrés. Par suite, le sextuple d'une somme de 3 carrés est décomposable en 36 bicarrés. Mais Legendre a démontré que tout nombre de la forme

$$8p+1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6$$

est une somme de 3 carrés; donc tout nombre de la forme

$$48p+6,\ 12,\ 18,\ 30,\ 36$$

est une somme de 36 bicarrés, au plus. Soit R le reste de la division d'un nombre N par 48; en retranchant de N une ou plusieurs fois les bicarrés 1^4, 2^4, 3^4, on ramène le reste R à l'un des nombres 6, 12, 18, 30, 36, et l'on arrive à former le tableau suivant, qui contient dans la colonne R le reste de la division d'un nombre N

par 48, et dans la colonne n le nombre maximum de bicarrés dont se compose N.

n	R
36	6, 12, 18, 30, 36;
37	3, 4, 7, 13, 15, 19, 21, 22, 28, 31, 34, 37, 39, 46;
38	0, 2, 5, 8, 14, 16, 20, 23, 24, 29, 32, 35, 38, 40, 44, 47;
39	1, 9, 17, 25, 33, 41, 45;
40	10, 26, 42;
41	11, 27, 43.

Donc *un nombre entier quelconque est la somme de quarante et un bicarrés, au plus.*

On observera que la démonstration précédente suppose le théorème vérifié jusqu'à $N = 2.3^4$; il est facile de le constater sur les *Tables arithmétiques* de Reuschle.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

Par M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

TRANSFORMATION DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Nous n'avons pas à parler de la transformation du premier degré; on a vu que non-seulement elle réussissait toujours, mais encore qu'elle servait à la réduction à la forme canonique.

Si l'on veut opérer la transformation du second degré, deux des facteurs $V - \alpha U$, $V - \beta U$, ... devront être

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVII, p. 385.

des carrés parfaits; on devra donc poser

$$U - \alpha V = (my + m')^2, \quad U - \beta V = (ny + n')^2.$$

On en conclut

$$\frac{U - \alpha V}{U - \beta V} = \frac{(my + m')^2}{(ny + n')^2},$$

ou bien, en observant que $\frac{U}{V} = x$,

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} = \frac{(my + m')^2}{(ny + n')^2}.$$

On pourra ensuite déterminer m, m', n, n' de manière à donner à la nouvelle intégrale la forme canonique, mais nous n'effectuerons pas le calcul en disant toutefois qu'il existe deux solutions à la question.

MÉTHODE D'ABEL.

Supposons que l'on désire calculer toutes les valeurs de y rationnelles par rapport à x, et telles que

$$\frac{dy^2}{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)} = \frac{\varepsilon^2 dx^2}{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}.$$

Si l'on pose

$$y = \frac{P}{Q},$$

P et Q désignant des fonctions entières de degré μ, à chaque valeur de y correspondront μ valeurs de x, et si l'on désigne par x_1 et x_2 deux d'entre elles, on aura

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1 - x_1^2)(1 - k x_1^2)}} = \frac{\pm dx_2}{\sqrt{(1 - x_2)^2 (1 - k^2 x_2^2)}}.$$

Si l'on égale à du les deux membres de la formule

précédente, on aura, si l'on veut,

$$x_1 = \operatorname{sn} u,$$
$$x_2 = \operatorname{sn}(\alpha \pm u),$$

α désignant une constante; on peut se borner à considérer le signe $+$, car $\operatorname{sn}(\alpha - u) = \operatorname{sn}(2K + u - \alpha)$ et $2K - \alpha$ est une constante. Ainsi, l'une des racines de l'équation $y = \frac{P}{Q}$ étant représentée par $\operatorname{sn} u$, les autres seront de la forme $\operatorname{sn}(u + \alpha)$. Si donc on pose $\frac{P}{Q} = \psi(x)$, on aura

$$y = \psi(\operatorname{sn} u)$$

identiquement, et, comme on a aussi $y = \psi(\operatorname{sn}\overline{u + \alpha})$, il faut en conclure

$$\psi(\operatorname{sn} u) = \psi(\operatorname{sn}\overline{u + \alpha}) = \psi(\operatorname{sn}\overline{u + 2\alpha}) \ldots;$$

par suite, les racines de $y = \psi(x)$ sont

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}\overline{u + \alpha}, \quad \operatorname{sn}\overline{u + 2\alpha}, \quad \operatorname{sn}\overline{u + 3\alpha}, \quad \ldots;$$

mais les racines de l'équation en question sont en nombre limité au plus égal à μ : il est facile d'en conclure que les μ valeurs de x se décomposent en cycles

$$\begin{array}{llll} \operatorname{sn} u, & \operatorname{sn}(u + \alpha), & \ldots, & \operatorname{sn}(u + \overline{n-1}\,\alpha), \\ \operatorname{sn} u', & \operatorname{sn}(u' + \alpha), & \ldots, & \operatorname{sn}(u' + \overline{n-1}\,\alpha), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots, \end{array}$$

n désignant un sous-multiple de μ. Si μ est un nombre premier, les cycles se réduiront à un seul. Nous examinerons en particulier le cas où μ est un nombre premier impair. Les solutions de $y = \psi(x)$ sont alors

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{sn}(u + \alpha), \quad \ldots, \quad \operatorname{sn}(u + \overline{\mu - 1}\,\alpha);$$

mais, $\operatorname{sn}(u + \mu\alpha)$ étant égal à $\operatorname{sn} u$, il faut que $\mu\alpha$ soit

une période; donc

$$\alpha = \frac{1}{\mu}\left(4Km + 2K'n\sqrt{-1}\right).$$

Mais l'équation $y = \psi(x)$ est de la forme

$$(A_\mu - B_\mu y)x^\mu + \ldots + A_0 - B_0 y = 0;$$

on en déduit, pour le produit des racines,

$$x_1 x_2 \ldots x_\mu = \pm \frac{A_0 - B_0 y}{A_\mu - B_\mu y},$$

et pour y une expression de la forme

$$y = \frac{a' + a x_1 x_2 \ldots x_\mu}{b' + b x_1 x_2 \ldots x_\mu}.$$

On peut simplifier cette expression; on a en effet

$$x_i = \operatorname{sn}(u + \overline{i-1}\,\alpha),$$
$$x_{\mu-i} = \operatorname{sn}(u + \mu\alpha - \overline{i-1}\,\alpha) = \operatorname{sn}(u - \overline{i-1}\,\alpha),$$

car $\mu\alpha$ est une période, et, en faisant usage d'une formule connue,

$$x_i x_{\mu-i} = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2(i-1)\alpha}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2(i-1)\alpha};$$

on a donc

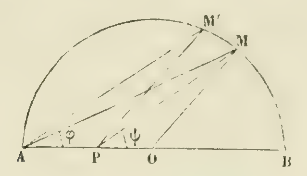
$$x_1 x_2 \ldots x_\mu = \frac{\operatorname{sn} u(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \alpha)(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 2\alpha)\ldots\left(\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 \frac{\mu-1}{2}\alpha\right)}{(1 - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}\alpha)\ldots\left(1 - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn}\frac{\mu-1}{2}\alpha\right)}.$$

Le produit $x_1 x_2 \ldots x_\mu$ est ainsi exprimé à l'aide de la seule racine $x_1 = \operatorname{sn} u$. Alors y prend la forme

$$y = \frac{a' + a\varphi(x_1)}{b' + b\varphi(x_1)}.$$

TRANSFORMATION DE LANDEN.

Considérons un demi-cercle tracé sur $AB = 2R$ comme diamètre : soient O son centre, P un point fixe pris sur AB, M un point variable de la circonférence, soient $OP = a$, $MPO = \psi$, $MAO = \varphi$. Supposons que le



point M se déplace infiniment peu et posons $MM' = ds$, nous aurons

$$(1) \qquad \frac{ds}{MP} = \frac{\sin M'PM}{\sin PM'M}.$$

Or

$$ds = 2R\,d\varphi, \quad MP = \sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi}, \quad M'PM = d\psi,$$

et $MM'P$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ plus l'angle que OM fait avec MP ou PMO; (1) devient alors

$$(2) \qquad \frac{2R\,d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi}} = \frac{d\psi}{\cos PMO}.$$

Si l'on observe alors que

$$\frac{R}{\sin\psi} = \frac{a}{\sin PMO}$$

ou

$$R \sin PMO = a \sin\psi,$$

$$R^2 \cos^2 PMO = R^2 - a^2 \sin^2\psi,$$

la formule (2) deviendra

$$\frac{2\,d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + 2aR\cos 2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\varphi}},$$

ou bien

$$\frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(R+a)^2 - 4aR\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{R^2 - a^2\sin^2\psi}},$$

ou enfin

$$\frac{2R}{R+a}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{4aR}{(R+a)^2}\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}\sin^2\psi}}.$$

Posons

(3) $$\sqrt{\frac{4aR}{(R+a)^2}} = k, \quad \frac{a}{R} = k_1,$$

et nous aurons

(4) $$\frac{2R}{R+a}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}.$$

Le triangle PMO donne d'ailleurs

$$\frac{a}{R} = k_1 = \frac{\sin(2\varphi - \psi)}{\sin\psi},$$

d'où

$$\frac{1 - k_1}{1 + k_1} = \frac{\sin\psi - \sin(2\varphi - \psi)}{\sin\psi + \sin(2\varphi - \psi)},$$

ou bien

(5) $$\frac{1 - k_1}{1 + k_1} = \frac{\operatorname{tang}(\psi - \varphi)}{\operatorname{tang}\varphi};$$

d'ailleurs les équations (3) donnent

(6) $$k = \frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1},$$

et la formule (4) devient

(7) $$\int_0^\varphi \frac{2}{1+k_1}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2\sin^2\psi}}.$$

Voici comment on fera usage de ces formules : supposons que l'on veuille calculer

$$\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2\psi}},$$

on calculera à l'aide de (6) un nouveau module k, et à l'aide de la substitution (5) (que l'on n'aura pas besoin d'effectuer réellement si l'on n'a pas besoin de faire un calcul numérique), on convertira l'intégrale proposée en une autre de module k, donné par la formule (6). Il est facile de prouver que $k < k_1$; en répétant alors la substitution, on peut ainsi obtenir ce que l'on appelle une *échelle de modules* de plus en plus voisins de un; on pourra donc développer l'intégrale suivant les puissances de $1 - k$, et l'on aura une série très-convergente.

Je dis, en effet, que $k < k_1$: c'est ce que prouve la formule (6), car la moyenne arithmétique $\frac{1 + k_1}{2}$ de 1 et k_1 est moindre que leur moyenne géométrique $\sqrt{k_1}$: ainsi $k < 1$; donc on finira par rendre $k < 1$. Supposons déjà $k_1 < 1$, on a

$$\frac{1 + k_1}{2} > 1 :$$

donc $\frac{2\sqrt{k_1}}{1 + k_1} > \sqrt{k_1} > k_1$; ainsi $k > k_1$, mais $k < 1$: donc, etc.

On peut donc aussi se donner k et calculer k_1; si alors k est moindre que l'unité, on aura $k_1 < k$, et l'on obtiendra des modules tendant vers zéro; quand k sera très-petit, l'intégrale elliptique développée suivant les puissances de k sera rapidement convergente.

Il est facile de voir que, si l'on pose

$$k = \sin\theta,$$

on aura

$$k_1 = \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2},$$

$$\operatorname{tang}(\psi - \varphi) = \cos\theta \operatorname{tang}\varphi,$$

ce qui simplifie le calcul logarithmique.

SUR LES APPLICATIONS DES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

Nous avons vu que toute intégrale d'une fonction rationnelle de x et d'un radical tel que

$$\sqrt{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}$$

se ramenait à trois types simples ne renfermant plus que le radical

$$\sqrt{A(1 + mx^2)(1 + m'x^2)}.$$

Ce radical, dans lequel A, m, m' peuvent être supposés réels, comme on l'a vu, si a, b, c, d, e le sont eux-mêmes, peut se ramener au suivant :

$$\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

en faisant sortir A de dessous le radical et en posant $mx^2 = -z^2$ et $-\frac{m'}{m} = k^2$; mais alors k n'est pas nécessairement réel. Je me propose maintenant de montrer que l'on peut toujours supposer k réel et compris entre zéro et 1, ce qui simplifiera évidemment la construction des Tables des fonctions elliptiques.

D'abord, on peut toujours supposer $A = \pm 1$ en faisant sortir sa valeur absolue de dessous le radical ; enfin, on peut supposer $m = \pm 1$, en posant $x\sqrt{m} = z$, si m est positif, et $x\sqrt{-m} = z$, si z est négatif. Ainsi nous pourrons toujours supposer $m = \pm 1$ et $m' = \pm k^2$. Cela

posé, on a vu et l'on vérifie très-facilement que, en posant $k'^2 = 1 - k^2$,

(1) Si $z = \operatorname{sn} x$, on a $$\frac{dz}{dx} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

(2) $$z = \frac{1}{\operatorname{sn} x}, \qquad \frac{dz}{dx} = -k\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{1}{k^2}z^2\right)},$$

(3) $$z = \operatorname{dn} x, \qquad \frac{dz}{dx} = -k'\sqrt{-(1-z^2)\left(1-\frac{1}{k'^2}z^2\right)},$$

(4) $$z = \frac{1}{\operatorname{dn} x}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\sqrt{-(1-z^2)(1-k'^2z^2)},$$

(5) $$z = \operatorname{tn} x, \qquad \frac{dz}{dx} = \sqrt{(1+z^2)(1+k'^2z^2)},$$

(6) $$z = \frac{1}{\operatorname{tn} x}, \qquad \frac{dz}{dx} = -k'\sqrt{(1+z^2)\left(1+\frac{1}{k'^2}z^2\right)},$$

(7) $$z = \operatorname{cn} x, \qquad \frac{dz}{dx} = -k'\sqrt{(1-z^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}z^2\right)},$$

(8) $$z = \frac{1}{\operatorname{cn} x}, \qquad \frac{dz}{dx} = k\sqrt{-(1-z^2)\left(1+\frac{k'^2}{k^2}z^2\right)}.$$

Dans ces formules, on peut constater que le radical est partout de la forme

$$\sqrt{\pm(1\pm z^2)(1\pm k_1^2z^2)},$$

et que l'on y rencontre toutes les combinaisons possibles des signes avec toutes les valeurs réelles et positives de k_1^2, en supposant $k^2 < 1$, trois combinaisons exceptées, à savoir

$$\sqrt{-(1+z^2)(1+k_1^2z^2)}, \quad \sqrt{\pm(1+z^2)(1-k_1^2z^2)};$$

mais la première est impossible si le radical doit être réel, et les deux autres rentrent dans les formes (7) et

(8) par le changement de $\frac{k}{k'}z$ en z ou de $\frac{k'}{k}z$ en z. Nous n'en parlerons donc pas.

Il résulte de là que toutes les équations de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{A}\sqrt{\pm(1 \pm mz^2)(1 \pm m'z^2)}$$

s'intégreront par les fonctions elliptiques, et que toute intégrale de la forme

$$\int \mathrm{F}\left[z, \sqrt{\pm(1 + mz^2)(1 + m'z^2)}\right]dz$$

se ramènera à la forme

$$\int f\left[z, \sqrt{(1 - z^2)(1 - k_1^2 z^2)}\right]dz,$$

où l'on aura

$$k_1^2 < 1.$$

Montrons sur un exemple la marche à suivre pour opérer cette réduction. Supposons qu'il s'agisse de l'intégrale

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1 + z^2)(1 - k_1^2 z^2)}};$$

en posant $k_1 z = \zeta$, on aura

$$u = \frac{1}{k_1}\int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1 - \zeta^2)\left(1 + \frac{1}{k_1^2}\zeta^2\right)}}.$$

On posera [*voir* formule (7)]

$$\frac{1}{k_1^2} = \frac{k^2}{1 - k^2},$$

d'où

$$k^2 = \frac{1}{1 + k_1^2} < 1,$$

et l'on aura

$$(a)\qquad u = \frac{k}{k'}\int\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\left(1+\frac{k^2}{k'^2}\zeta^2\right)}}.$$

On en conclut que ζ est égal à $\operatorname{cn}\left(-\frac{k'^2}{k}u + \text{const.}\right)$, et par suite que

$$\sqrt{1-\zeta^2} = \operatorname{sn}\left(-\frac{k'^2}{k}u + \text{const.}\right).$$

Si donc on pose

$$\sqrt{1-\zeta^2} = z,$$

z sera le sinus amplitude d'un multiple de u, et l'intégrale u sera ramenée à la forme voulue

$$u = -\frac{1}{k}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

La méthode de réduction que nous venons d'indiquer a, sur celles que l'on enseigne, l'avantage d'être purement analytique; elle se retrouve facilement; si l'on n'indique pas la marche qui conduit aux substitutions à effectuer, on peut hésiter longtemps avant de les retrouver. D'ailleurs, notre méthode a l'avantage de donner immédiatement z exprimé en fonction de u au moyen des fonctions sn, cn, dn.

Voici d'ailleurs les substitutions à effectuer dans les différents cas pour réduire l'intégrale

$$\int F\left[x, \sqrt{A(1+mx^2)(1+m'x^2)}\right]dx$$

à la forme

$$\int f\left[z, \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\right]dz \quad \text{ou} \quad k<1,$$

d'après MM. Briot et Bouquet, 1re édition, p. 194.

1° A positif, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$, $h > h'$, on pose

$$x = \frac{z}{h}.$$

2° A positif, $m = -h^2$, $m' = h'^2$,

$$hx = \sqrt{1 - z^2}.$$

3° A positif, $m = h^2$, $m' = h'^2$, $h > h'$.

$$hx = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

4° A négatif, $m = -h^2$, $m' = h'^2$,

$$hx = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

5° A négatif, $m = -h^2$, $m' = -h'^2$, $h > h'$,

$$h'x = \sqrt{1 - \frac{h^2 - h'^2}{h^2} z^2}.$$

Quand on a ramené le radical à la forme voulue, il reste encore à calculer les quantités que l'on a désignées par K et K' et dont dépendent les périodes. A cet effet, on calcule d'abord la quantité $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$; on part pour cela de la formule

$$\mathrm{dn}\, x = \sqrt{k'} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)}.$$

Si l'on fait $x = 0$, on a

$$\sqrt{k'} = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots}.$$

On pourra résoudre cette équation par la méthode du retour des suites. Quand on connaît q, K se calcule facilement, et, en effet, on a

$$\frac{\mathrm{sn}\, x}{x} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\mathrm{H}(x)}{x\Theta(x)},$$

et, pour $x = 0$,

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(0)}{\Theta(0)}.$$

En faisant, dans l'expression de $\operatorname{sn} x$, $x = K$, $\operatorname{sn} x$ devient égal à 1, et l'on a

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(K)}{\Theta(K)};$$

donc

$$1 = \frac{H'(0)\,\Theta(K)}{H(K)\,\Theta(0)}.$$

Remplaçons $H'(0) = \lim \frac{H(x)}{x}$ pour $x = 0$, $\Theta(K)$, $H(K)$ et $\Theta(0)$ par leurs développements en produits, nous aurons

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)^2\ldots}{(1-q)^2(1-q^3)^2\ldots}\,\frac{(1+q)^2(1+q^3)^2\ldots}{(1+q^2)^2(1+q^4)^2\ldots}$$

ou

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots}{(1-q)(1-q^3)\ldots}\,\frac{(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)\ldots}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q)(1+q^3)\ldots}{(1-q)(1-q^3)\ldots(1+q^2)(1+q^4)\ldots}$$

$$= (1+q)^2(1+q^3)^2(1+q^5)^2\ldots(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.$$

C'est précisément la valeur de $\Theta_1(0)$.

On a donc finalement

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \Theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,$$

d'où l'on conclut K.

Mais il est clair que l'on pourra aussi calculer K et K′ par les formules

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}};$$

en les développant en série. Si k est voisin de l'unité, K sera donné par une série peu convergente; mais K' sera alors donné par une série très-convergente. Pour augmenter la convergence des séries, on pourra employer la transformation de Landen.

Le développement en série de K, par exemple, se fera comme il suit :

$$[(1-x^2)(1-k^2x^2)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{k^4x^4}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^6 + \ldots\right].$$

REMARQUE.

Les formules (1), (2), ..., (8) du paragraphe précédent conduisent à des formules curieuses que l'on peut rapprocher des formules élémentaires

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Considérons, par exemple, la formule (5); on en tire

$$x = \int \sqrt{(1+z^2)(1-k'^2z^2)}\,dz.$$

Or z, étant la tangente amplitude de x, s'annule avec x : on doit donc prendre pour limite inférieure de l'intégrale zéro; mais alors on a

$$\sqrt{-1}\,z = \operatorname{sn}(k', x\sqrt{-1}),$$

ou bien

$$\operatorname{tn}(k, x) = \frac{1}{\sqrt{-1}}\operatorname{sn}(k', x\sqrt{-1}),$$

ou encore

$$\frac{\operatorname{sn}(k, x)}{\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2(k, x)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \operatorname{sn}\left(k', x\sqrt{-1}\right).$$

Il est clair que l'on pourrait obtenir ainsi une infinité de formules du même genre, mais qui seront plus curieuses qu'utiles.

RÉSUMÉ DES PRINCIPALES FORMULES ELLIPTIQUES.

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

$$\Theta\ (x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,$$

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} - \ldots,$$

$$\mathrm{H}\ (x) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi x}{2K} - \ldots,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5\pi x}{2K} + \ldots,$$

$$c = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)\ldots,$$

$$\Theta\ (x) = c\left(1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 - 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\ldots,$$

$$\Theta_1(x) = c\left(1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 + 2q^3\cos\frac{\pi x}{K} + q^6\right)\ldots,$$

$$\mathrm{H}\,(x) = 2cq^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K}\left(1 - 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 - 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots,$$

$$\mathrm{H}_1(x) = 2cq^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K}\left(1 + 2q^2\cos\frac{\pi x}{K} + q^4\right)\left(1 + 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + q^8\right)\ldots,$$

$$\Theta\,(-x) = \Theta\,(x), \qquad \Theta_1(-x) = \Theta_1(x),$$

$$\mathrm{H}\,(-x) = -\mathrm{H}\,(x), \qquad \mathrm{H}_1(-x) = \mathrm{H}_1(x),$$

$$\Theta\,(x + K) = \Theta_1(x), \qquad \Theta\,(x - K) = \Theta_1(x),$$

$$\Theta_1(x + K) = \Theta\,(x), \qquad \Theta_1(x - K) = \Theta\,(x),$$

$$\mathrm{H}\,(x + K) = \mathrm{H}_1(x), \qquad \mathrm{H}\,(x - K) = -\mathrm{H}_1(x),$$

$$\mathrm{H}_1(x + K) = -\mathrm{H}\,(x), \qquad \mathrm{H}_1(x - K) = \mathrm{H}\,(x);$$

$$\begin{aligned}
\Theta\,(x+2K) &= \Theta\,(x),\\
\Theta_1(x+2K) &= \Theta_1(x),\\
H\,(x+2K) &= -H\,(x),\\
H_1(x+2K) &= -H_1(x).
\end{aligned}$$

Si l'on fait

$$e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(2x+K'\sqrt{-1})} = A \quad \text{et} \quad e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})} = B,$$

on a

$$\begin{aligned}
\Theta\,(x+2K'\sqrt{-1}) &= -A\Theta\,(x), & \Theta\,(x+K'\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\,BH\,(x),\\
\Theta_1(x+2K'\sqrt{-1}) &= A\Theta_1(x), & \Theta_1(x+K'\sqrt{-1}) &= BH_1(x),\\
H\,(x+2K'\sqrt{-1}) &= -AH\,(x), & H\,(x+K'\sqrt{-1}) &= \sqrt{-1}\,B\Theta(x),\\
H_1(x+2K'\sqrt{-1}) &= AH_1(x), & H_1(x+K'\sqrt{-1}) &= B\Theta_1(x).
\end{aligned}$$

$\Theta\,(x)$ s'annule pour $x = 2iK + (2j+1)K'\sqrt{-1}$,

$\Theta_1(x)$ » $x = (2i+1)K + (2j+1)K'\sqrt{-1}$,

$H\,(x)$ » $x = 2iK + 2jK'\sqrt{-1}$,

$H_1(x)$ » $x = (2i+1)K + 2jK'\sqrt{-1}$.

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}},$$

$$k' = \sqrt{1-k^2},$$

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad \operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H_1(x)}{\Theta(x)}, \quad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'}\frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

$\operatorname{sn} x$ s'annule pour $x = 0$ et $2K$,

$\operatorname{cn} x$ » $x = K,\ -K$,

$\operatorname{dn} x$ » $x = \pm K + K'\sqrt{-1}$,

Périodes de $\operatorname{sn} x = 4K,\ 2K'\sqrt{-1}$,

» $\operatorname{cn} x = 4K,\ 2K'\sqrt{-1} + 2K$,

» $\operatorname{dn} x = 2K,\ 2K'\sqrt{-1}$.

Infinis des trois fonctions $= K'\sqrt{-1},\quad 2K + K'\sqrt{-1}$.

$\operatorname{sn} 0 = 0,$	$\operatorname{cn} 0 = 1,$	$\operatorname{dn} 0 = 1,$
$\operatorname{sn} K = 1,$	$\operatorname{cn} K = 0,$	$\operatorname{dn} K = k',$
$\operatorname{sn} 2K = 0,$	$\operatorname{cn} 2K = 1,$	$\operatorname{dn} 2K = 1,$
$\operatorname{sn} K'\sqrt{-1} = \infty,$	$\operatorname{cn} K'\sqrt{-1} = \infty,$	$\operatorname{dn} K'\sqrt{-1} = \infty,$
$\operatorname{sn} 2K'\sqrt{-1} = 0,$	$\operatorname{cn} 2K'\sqrt{-1} = -1,$	$\operatorname{dn} 2K'\sqrt{-1} = -1,$
$\operatorname{sn}(K + K'\sqrt{-1}) = \frac{1}{k},$	$\operatorname{cn}(K + K'\sqrt{-1}) = -\frac{k'\sqrt{-1}}{k},$	$\operatorname{dn}(K + K'\sqrt{-1}) = 0,$
$\operatorname{sn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty,$	$\operatorname{cn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty,$	$\operatorname{dn}(2K + K'\sqrt{-1}) = \infty,$
$\operatorname{sn}(2K + 2K'\sqrt{-1}) = 0,$	$\operatorname{cn}(2K + 2K'\sqrt{-1}) = -1,$	$\operatorname{dn}(2K + 2K'\sqrt{-1}) = -1.$
$\operatorname{sn}(-x) = -\operatorname{sn} x,$	$\operatorname{cn}(-x) = \operatorname{cn} x,$	$\operatorname{dn}(-x) = \operatorname{dn} x,$
$\operatorname{sn}(2K \pm x) = \mp \operatorname{sn} x,$	$\operatorname{cn}(2K \pm x) = \mp \operatorname{cn} x,$	$\operatorname{dn}(2K \pm x) = \operatorname{dn} x,$
$\operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} + x) = \frac{1}{k \operatorname{sn} x},$	$\operatorname{cn}(K'\sqrt{-1} + x) = -\frac{\sqrt{-1}}{k} \frac{\operatorname{dn} x}{\operatorname{sn} x},$	$\operatorname{dn}(K'\sqrt{-1} + x) = -\sqrt{-1} \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{sn} x},$
$\operatorname{sn}(K + x) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x},$	$\operatorname{cn}(K + x) = -k' \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x},$	$\operatorname{dn}(K + x) = \frac{k'}{\operatorname{dn} x},$
$\operatorname{sn}(2K'\sqrt{-1} + x) = \operatorname{sn} x,$	$\operatorname{cn}(2K'\sqrt{-1} + x) = -\operatorname{cn} x,$	$\operatorname{dn}(2K'\sqrt{-1} + x) = -\operatorname{dn} x,$
$\operatorname{sn}' x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x,$	$\operatorname{cn}' x = -\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x,$	$\operatorname{dn}' x = -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x.$

$$\operatorname{sn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b \pm \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$\operatorname{cn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \mp \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} a \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$\operatorname{dn}(a \pm b) = \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b \mp k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b},$$

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = cx - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \mathrm{Z}(x),$$

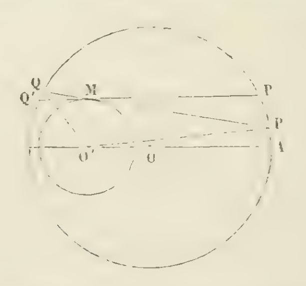
$$c = 8\,\frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 - \ldots}{q - 4q^4 + 9q^9 - \ldots},$$

$$\int_0^x \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}^2 x}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 x}\, dx = \Pi(x, a)$$

$$= x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

THÉORÈME DE PONCELET.

Voici encore une interprétation très-curieuse du théorème qui vient de nous occuper : considérons deux cercles intérieurs l'un à l'autre; soient R et r leurs



rayons et PQ, P'Q' deux tangentes infiniment voisines menées au cercle de rayon r; soit OO' la ligne des centres

$$\text{arc AP} = 2\varphi R, \quad \text{arc AQ} = 2\psi R.$$

On aura

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{d\varphi}{d\psi};$$

mais les triangles semblables PP'M, QQ'M donnent

$$\frac{PP'}{QQ'} = \frac{MP}{MQ'} = \frac{M}{MQ};$$

ainsi

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{MP}{MQ};$$

or, à la limite, le point M vient sur le cercle r au point de contact de PQ, et l'on a

$$\overline{MP}^2 = \overline{O'P}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - r^2 + 2Ra\cos 2\varphi,$$

$$\overline{MQ}^2 = \overline{O'Q}^2 - r^2 = R^2 + a^2 - r^2 + 2Ra\cos 2\psi:$$

on a donc

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \sqrt{\frac{R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\varphi}{R^2 + a^2 - r^2 + 2aR\cos 2\psi}}$$

$$= \sqrt{\frac{(R+a)^2 - r^2 - 2aR\sin^2\varphi}{(R+a)^2 - r^2 - 2aR\sin^2\psi}}.$$

Si l'on fait

$$k^2 = \frac{2aR}{(R+a)^2 - r^2},$$

on a l'équation connue

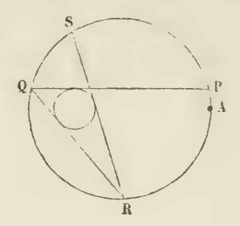
$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} = 0,$$

d'où l'on peut conclure une construction géométrique de son intégrale. Mais on peut en déduire un résultat nouveau.

L'équation précédente devient, en intégrant,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} -\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} + \int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \\ = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}} \end{aligned} \right.$$

et μ est la valeur de ψ pour $\varphi = 0$. On voit que μ ne dépend ni de φ ni de ψ; si donc, à partir du point φ, on mène une seconde tangente QR au cercle intérieur, et



si l'on pose AR $= 2\chi$, on aura encore, en posant

$$1 - k^2\sin^2\varphi = \Phi, \quad 1 - k^2\sin^2\psi = \Psi, \quad \ldots, \quad 1 - k^2\sin^2\mu = \mathrm{M},$$

$$(3) \qquad -\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{\Psi}} + \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt{\mathrm{X}}} = \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mathrm{M}}};$$

en menant par R une nouvelle tangente RS, on aurait entre l'arc $2\theta = $ AS et l'arc 2χ une relation analogue: les intégrales $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}$, $\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Psi}}$, ... forment donc une progression arithmétique dont la raison est $\int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mathrm{M}}}$.

Supposons que le polygone PQRST soit fermé et que le point T coïncide avec A, le dernier des arcs $\varphi, \psi, \chi, \ldots$ sera de la forme $\varphi + 2n\pi$. En ajoutant alors les formules, telles que (2) et (3), on a

$$-\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} + \int_0^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} = m \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mathrm{M}}}$$

ou bien

$$\int_{\varphi}^{\varphi + n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = m \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\mu}};$$

donc le premier membre de cette formule ne dépend pas de φ; donc :

S'il existe un polygone de m côtés inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre, il existera une infinité de polygones de m côtés jouissant de la même propriété.

Ce théorème est évidemment projectif et s'applique aux coniques : il a été découvert par Poncelet ; la démonstration précédente est de Jacobi.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1262

(voir 2e série, t. XVII, p. 239);

Par M. MORET-BLANC.

Un point F *est donné par ses coordonnées* α, β *relativement à deux axes* OX, OY, *comprenant entre eux un angle* θ : *on demande de trouver l'équation de l'hyperbole qui passe par l'origine* O, *qui a le point* F *pour un de ses foyers, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes* OX *et* OY.

Quatre hyperboles répondent à la question. L'équation de chacune d'elles étant de la forme

$$xy - px - qy = 0,$$

il s'agit de trouver les quatre couples de valeurs de p *et* q, *exprimées en fonction des données* α, β *et* θ.

(Boilleau.)

L'équation générale des hyperboles passant par l'origine et ayant leurs asymptotes parallèles aux axes OX,

OY est

$$(1) \qquad xy - px - qy = 0.$$

Les coordonnées du centre sont $x = q$, $y = p$.

Le foyer donné devant se trouver sur la bissectrice de l'un des angles des asymptotes, ses coordonnées doivent vérifier l'une des équations

$$y - p = x - q \quad \text{ou} \quad y - p = -(x - q),$$

c'est-à-dire satisfaire à l'une des relations

$$(2) \qquad p - q = \beta - \alpha$$

$$(3) \qquad p + q = \beta + \alpha.$$

En transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au centre de la courbe, son équation devient

$$(4) \qquad x'y' = pq.$$

Si l'on prend pour axes de coordonnées les axes de la courbe, les formules de transformation sont

$$x' = \frac{x \sin\frac{\theta}{2} - y \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}, \quad y' = \frac{x \sin\frac{\theta}{2} + y \cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta},$$

et l'équation devient

$$(5) \qquad x^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - y^2 \cos^2\frac{\theta}{2} = pq \sin^2\theta.$$

Il y a deux cas à considérer :

1° Soit $pq > 0$.

On a, en appelant a^2 et b^2 les carrés des demi-axes,

$$a^2 = 4pq \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad b^2 = 4pq \sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$a^2 + b^2 = c^2 = 4pq, \quad c = \pm 2\sqrt{pq}.$$

Les coordonnées du foyer sont, dans le système (4),

$$c\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = \frac{c}{2\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\pm\sqrt{pq}}{\cos\frac{\theta}{2}},$$

et l'on a, dans le système primitif,

$$(6) \qquad \beta - p = \alpha - q = \pm\frac{\sqrt{pq}}{\cos\frac{\theta}{2}}.$$

2° Soit $pq < 0$.

On a alors, a étant l'axe transverse,

$$a^2 = -4pq\sin^2\frac{\theta}{2},\quad b^2 = -4pq\cos^2\frac{\theta}{2},\quad c^2 = -4pq,$$

$$c = \pm 2\sqrt{-pq}.$$

Les coordonnées du foyer sont, dans le système (4),

$$\frac{c\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} = \frac{c}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \pm\frac{\sqrt{-pq}}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

et l'on a, dans le système primitif,

$$(7) \qquad \beta - p = -(\alpha - q) = \pm\frac{\sqrt{-pq}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs de p et q sont déterminées par les systèmes (6) et (7).

Le système (6) donne

$$p = \frac{-(\alpha + \beta\cos\theta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$q = \frac{-(\beta + \alpha\cos\theta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs tirées du système (7) se déduisent des précédentes en changeant les signes de q et α. On a donc

$$p = \frac{(\alpha - \beta\cos\theta) \pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}},$$

$$q = \frac{(\beta - \alpha\cos\theta) \mp \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Les valeurs de p et q sont faciles à construire graphiquement: $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta\cos\theta} = \mathrm{OF}$; $\alpha + \beta\cos\theta$ et $\beta + \alpha\cos\theta$ sont les projections orthogonales de OF sur les axes de coordonnées. Les valeurs des numérateurs du second système se construisent aussi facilement, et l'on sait construire les quotients des demi-longueurs trouvées par $\sin^2\frac{\theta}{2}$.

Note. — La même question a été résolue par MM. E. Fauquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; G. Lambiotte, élève de l'École polytechnique de Bruxelles; Eugène Delmas, élève du lycée de Lyon et J. Chambon.

Question 1269

(voir 2e série, t. XVII, p. 287);

Par M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

Une droite AB, *de longueur constante, s'appuie sur deux axes rectangulaires* OX, OY : *lieu du point* M *de cette droite, tel que l'on ait*

$$\mathrm{MA}.\mathrm{AO} = \mathrm{MB}.\mathrm{BO}. \qquad (\text{Gambey.})$$

Appelons x et y les coordonnées du point M; φ l'angle

BAO, et a la longueur de AB. On doit avoir

$$\frac{MA}{MB} = \frac{BO}{AO} = \operatorname{tang}\varphi,$$

ce que l'on peut écrire

$$\frac{MA}{\sin\varphi} = \frac{MB}{\cos\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi};$$

mais $MA = \frac{y}{\sin\varphi}$, $MB = \frac{x}{\cos\varphi}$; on aura donc

$$\frac{y}{\sin^2\varphi} = \frac{x}{\cos^2\varphi} = \frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

Ces relations suffiraient pour construire le lieu cherché, puisque les coordonnées x et y sont exprimées en fonctions de la même variable φ; mais cherchons l'équation de la courbe. Les deux premiers rapports donnent

$$\frac{y}{\sin^2\varphi} = \frac{x}{\cos^2\varphi} = x + y,$$

d'où

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{y}{x+y}}, \quad \cos\varphi = \sqrt{\frac{x}{x+y}};$$

l'équation de la courbe est donc

$$x + y = \frac{a\sqrt{x+y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x+y}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = a,$$

et, en faisant disparaître les radicaux,

$$(1) \qquad (x^2 - y^2)^2 - 2a^2(x+y)^2 + a^4 = 0.$$

Cette équation se simplifie, en prenant pour axes de coordonnées les bissectrices de l'angle XOY. Les for-

mules de transformation sont, en effet, dans ce cas,

$$x = (x' - y')\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = (x' + y')\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et l'équation devient

$$(2) \qquad x'^2 y'^2 - a^2 x'^2 + \frac{a^4}{4} = 0,$$

d'où

$$y' = \pm \frac{a}{x'}\sqrt{x'^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

La courbe est symétrique, par rapport aux nouveaux axes OX', OY'. On ne peut faire varier x' que de $-\infty$ à $-\frac{a}{2}$ et de $+\frac{a}{2}$ à $+\infty$.

Pour $x' = \pm\infty$, on a $y' = \pm a$; la courbe est donc asymptote à ces deux droites parallèles à OX'. La courbe se compose de deux branches infinies, concaves vers l'axe OX'; de plus, elle est tangente aux anciens axes à une distance de l'origine égale à a; ce qu'il est facile de vérifier en faisant successivement x et y égaux à zéro dans l'équation (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Moret-Blanc; Ferdinando Pisani; Sondat; J. Chambon; Albert Lacazette, élève du lycée de Bordeaux et Vladimir Habbé.

RECTIFICATION.

Nous avons reçu trop tard pour les mentionner à leur place : une solution de la question 1265 par M. Vladimir Habbé; quatre solutions de la question 1286 par MM. G. Kœnigs, Lez, Lacazette et Salomon Strimban, élève de

l'École polytechnique de Riga; une solution analytique et géométrique de la même question par M. Droz; trois solutions de la question 1290 par MM. Gambey, Lez et Strimban; enfin une solution de la question 1292 par M. Meyl.

QUESTIONS.

1307. On donne la distance des centres et les rayons de deux circonférences C et C′ intérieures l'une à l'autre. Une droite AB, de longueur constante, se déplace de manière que ses extrémités A et B restent respectivement sur C et sur C′ : on demande l'expression de la surface comprise entre une position initiale et une position finale de la droite AB et les deux circonférences. En déduire la position initiale de la droite AB pour que l'aire correspondant à un déplacement de 120 degrés sur la circonférence intérieure soit maximum.

(L. Vandenpeereboom.)

1308. Soient O un point fixe dans un plan, M un point qui se meut dans ce plan, MV la vitesse à un instant quelconque, MU l'accélération. Démontrer que l'aire du triangle OMU mesure la dérivée de l'aire variable du triangle OMV par rapport au temps. (Laisant.)

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVII, 2e SÉRIE.)

Théorie des nombres.

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Géodésie.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Correspondance.

Questions proposées.

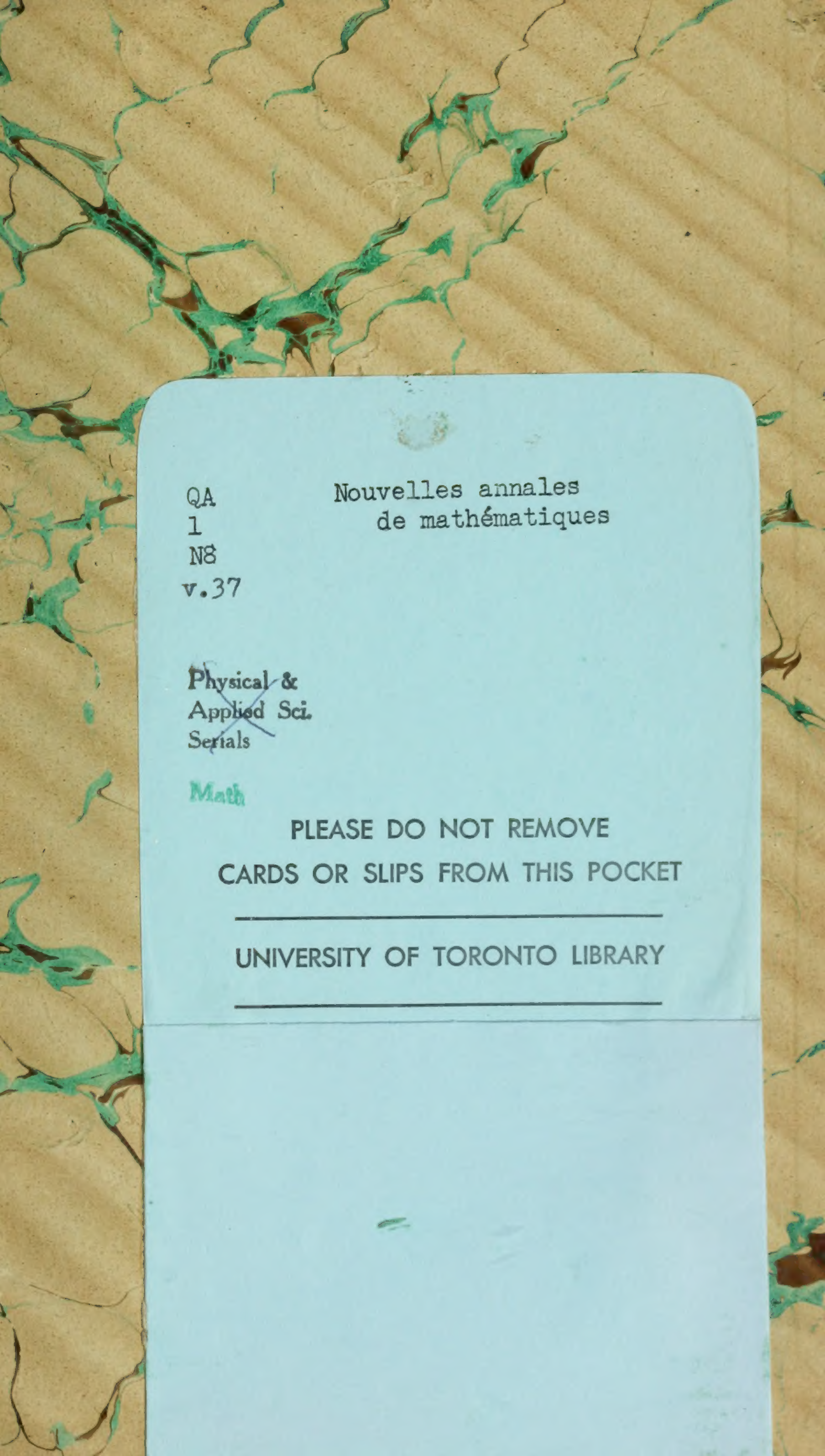
Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XVII, 2e SÉRIE.)

Paris.— Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.




QA
1
N8
v.37
Nouvelles annales
de mathématiques
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

